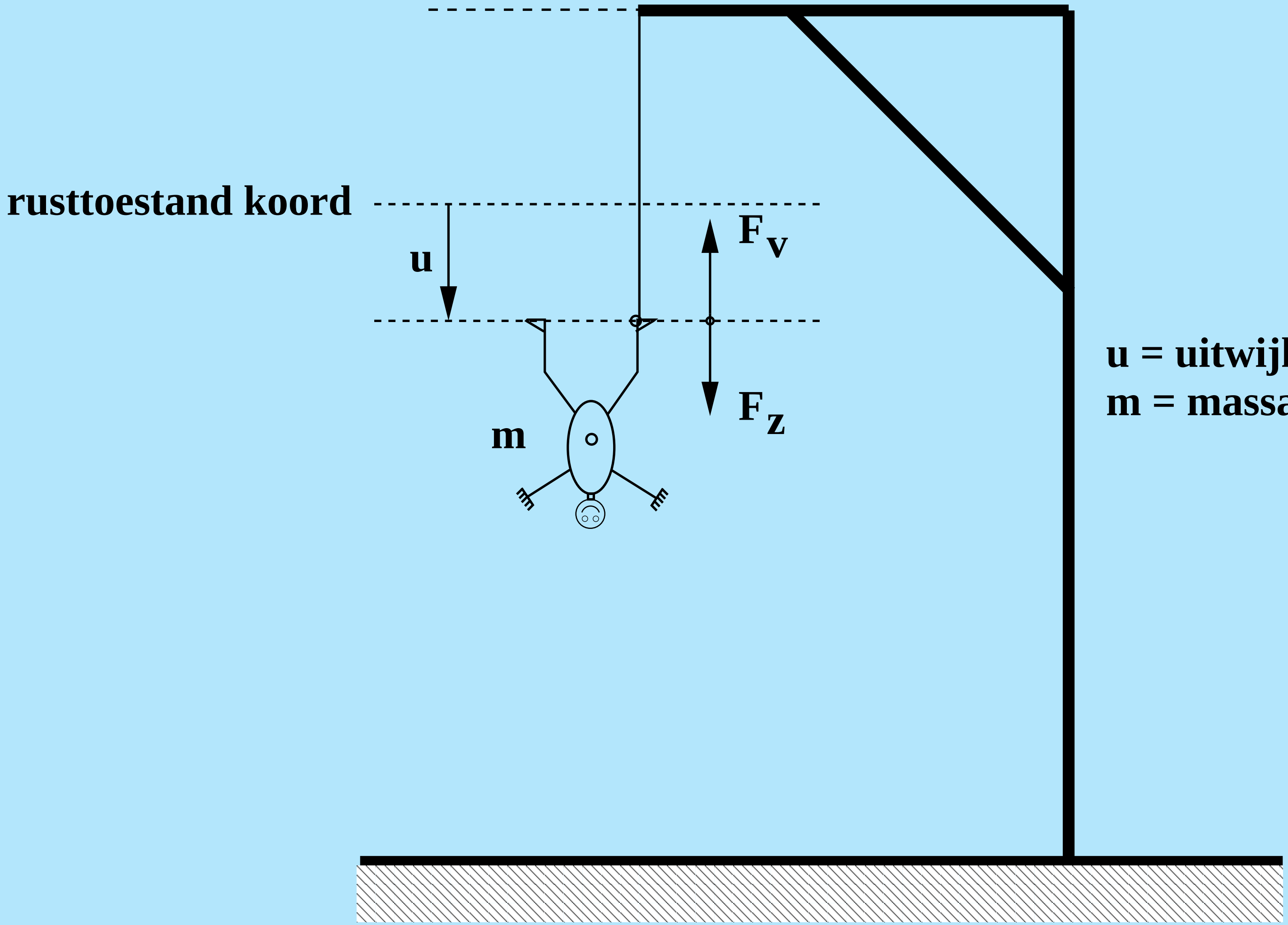
Wiskunde in actie : Bungeejumpen met een rugzak !

Kees Lemmens,
Email: C.W.J.Lemmens@Ewi.TUDelft.nl,
Faculty of Electrotechnical Engineering,
Mathematics and Computer Science,
Delft University of Technology,
The Netherlands.

Bungeejump in het echt

Bungeejump schematisch



u = uitwijking
m = massa persoon + elastiek

Statisch probleem : stilhangen

Wanneer hang je helemaal stil ?

Veerkracht : $F_v = -ku$ (k = elasticiteitsmodulus van elastiek)
Zwaartekracht : $F_z = -mg$ (g = gravitatieconstante)

Stilhangen als $F_{veerkracht}$ precies tegengesteld aan $F_{zwaartekracht}$:

$$\boxed{F_v = -F_z}$$

Dus je hangt stil bij : $u_e = -\dfrac{mg}{k}$

Wat getallen

Tijd om wat getallen te kiezen !

massa jumper + koord	$mj = 80\ kg$
massa rugzak	$mr = 20\ kg$
veerconstante koord	$k = 200\ N/m = kg/s^2$
gravitatieconstante	$g = 9.8\ m/s^2$

Statisch probleem : stilhangen 2

Op welk punt hang je dus helemaal stil ?

$$u_e = -\frac{mg}{k}$$

Dat is voor de waaghals met rugzak bij een uitrekking van :

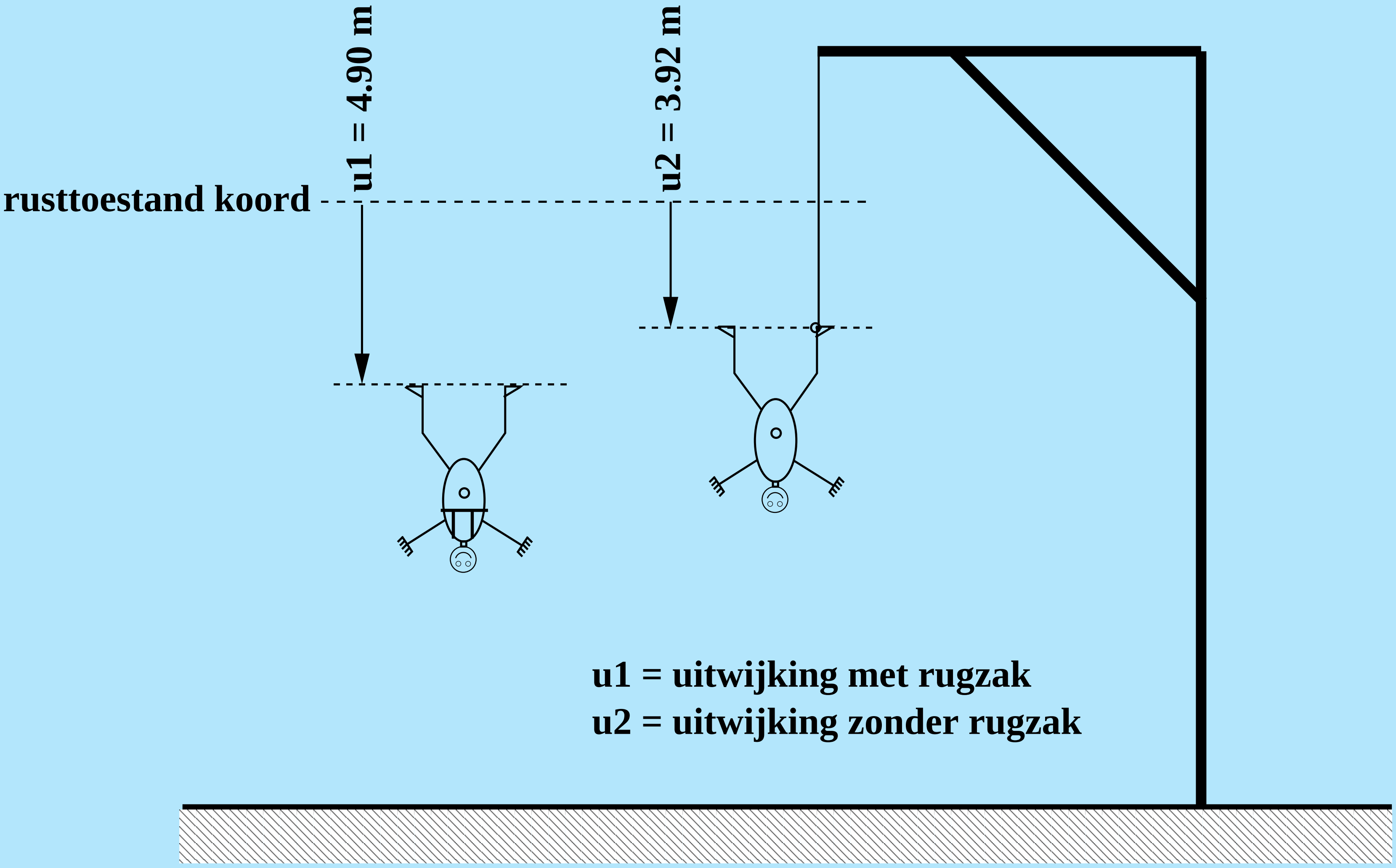
$$u_e = -\frac{mg}{k} = (80 + 20) * 9.8/200 = -4.90\ m$$

En dezelfde waaghals zonder rugzak :

$$u_e = \frac{mg}{k} = 80 * 9.8/200 = -3.92\ m$$

Conclusie : zonder rugzak ligt het evenwicht dus hoger dan met rugzak !

Statisch probleem : stilhangen 3



Bungeejump in het echt 2

Dynamisch probleem : bewegen !

Voor wiskundigen is het bewegende probleem veel leuker !
(voor jullie ook ?)

Volgens Newton is op elke moment de drijvende kracht :

$$F_N = m.a$$

En die is weer gelijk aan de som van alle optredende krachten :

$$F_N = F_z + F_v \text{ ofwel } F_N - F_z - F_v = 0$$

en dus :

$$m.a + m.g + k.u = 0$$

Snelheid en versnelling

Nu een intermezzo over plaats, snelheid en versnelling :

Plaats is in ons probleem simpelweg : $u(t)$

Snelheid is verandering van de *plaats* : $v(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

Versnelling is verandering van de *snelheid* : $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d^2u(t)}{dt^2}$

Differentiaalvergelijkingen : massa-veer systeem

Kennis over plaats en versnelling toegepast op dynamisch probleem

u hangt nu af van de tijd :

$$m.a = -m.g - k.u(t)$$

$$m.\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -m.g - k.u(t)$$

Of in standaard vorm :

$$m.\frac{d^2u(t)}{dt^2} + m.g + k.u(t) = 0$$

En dat is een heuse echte 2e orde differentiaalvergelijking !

Differentiaalvergelijkingen en gewone vergelijkingen

- Gewone vergelijkingen hebben als oplossing **getallen**
- Differentiaalvergelijkingen hebben als oplossing **functies**

Oplossen 2e orde DV : functies proberen

De term $m.g$ is een constante die de evenwichtstoestand bepaalt en is nu niet zo boeiend (tenzij je je rugzak verliest :-). Je kunt immers je nulpunt overal kiezen. Als we ook de constanten m en k 1 kiezen zoeken we dus oplossingen voor :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + u(t) = 0$$

Als we $u(t) = c.t^2$ proberen zien we al snel dat dat nooit altijd 0 kan zijn. Hetzelfde geldt voor $u(t) = c.log(t)$ of $u(t) = c.t^3$

Maar ... voor $\boxed{u(t) = c.sin(t)}$ of $\boxed{u(t) = c.cos(t)}$ is het *wel* altijd 0 !

Bungeejump in het echt 3

Begintoestand : beginpositie en snelheid

Er staat nog een constante voor de functie.

De waarde daarvan wordt bepaald door de beginuitwijking en/of snelheid : voor elke beginpositie of snelheid een andere constante.

Logisch, want hoe hoger je begint, hoe groter de slingeruitwijking.

Welke situatie hoort denk je bij de constante $c = 0$?

Oplossing met Maple

```
> restart:
> eq :=diff(u(t),t$2) + u(t);
```

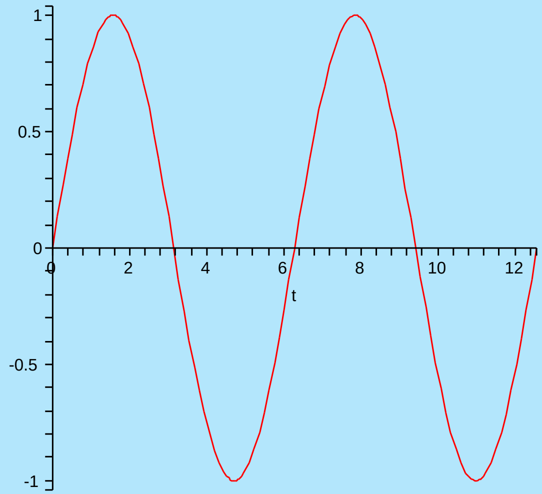
$$eq := \frac{d^2}{dt^2}u(t) + u(t)$$

```
> sol := dsolve(eq,u(t));
> u(t):= rhs(sol);
```

$$sol := u(t) = \_C1 \sin(t) + \_C2 \cos(t)$$
$$u(t) := \_C1 \sin(t) + \_C2 \cos(t)$$

```
> _C1:=1; _C2:=0; plot(u(t),t=0..4*Pi);
```

$$\_C1 := 1$$
$$\_C2 := 0$$



Wat realistischer : demping

Het voorbeeld hiervoor slingert altijd even hard en stopt nooit. Dat komt in de praktijk niet zo vaak voor : door demping zal de boel steeds langzamer gaan slingeren.

De demping hangt af van de snelheid : hoe harder, hoe meer wrijving. Hij is echter altijd tegengesteld aan de snelheid !

$$F_w = -c_w . v$$

Dan wordt de nieuwe vergelijking :

$$F_N = F_w + F_z + F_v \text{ ofwel } F_N - F_z - F_w - F_v = 0$$

$$m.\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c_w.\frac{du(t)}{dt} + m.g + k.u(t) = 0$$

Nieuwe oplossing gedempte probleem met Maple

```
> restart:
> eq :=diff(u(t),t$2) + 0.3*diff(u(t),t) + u(t);
```

$$eq := \frac{d^2}{dt^2}u(t) + 0.3\,\frac{d}{dt}u(t) + u(t)$$

```
> sol:= dsolve(eq,u(t));
> u:= unapply(rhs(sol),t);
```

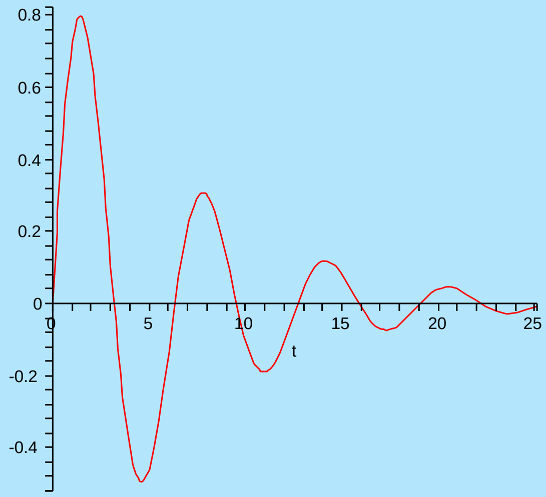
$$sol := u(t) = \_C1\, e^{-\frac{3}{20}t}\sin\left(1/20\sqrt{391}t\right) + \_C2\, e^{-\frac{3}{20}t}\cos\left(1/20\sqrt{391}t\right)$$

$$u := t \mapsto \_C1 * e^{-\frac{3}{20}t}\sin\left(1/20\sqrt{391}t\right) + \_C2 * e^{-\frac{3}{20}t}\cos\left(1/20\sqrt{391}t\right)$$

```
> _C1:=1; _C2:=0; plot(u(t),t=0..8*Pi);
```

$$\_C1 := 1$$

$$\_C2 := 0$$



met en zonder rugzak : 2 massa's dus 2 vergelijkingen

Ok, en wat gebeurt er nu als je tijdens het slingeren je rugzak verliest ?

Simpel : de massa neemt af. Die was eerst $m_1 = mj + mr$ en wordt nu $m_2 = mj$ en dus geldt vanaf dat moment een andere vergelijking.

Tot het tijdstip van verliezen (dat we te noemen) geldt :

$$m_1.\frac{d^2u(t)}{dt^2} + c_w.\frac{du(t)}{dt} + m_1.g + k.u(t) = 0$$

En vanaf het tijdstip te geldt :

$$m_2.\frac{d^2u(t)}{dt^2} + c_w.\frac{du(t)}{dt} + m_2.g + k.u(t) = 0$$

Wat is de begintoestand van de 2e vergelijking ?

Een differentiaalvergelijking beschrijft alle mogelijke situaties voor elke mogelijke beginhoogte en snelheid ! Pas wanneer je die 2 begintoestanden weet, weet je hoe het verhaal verder gaat.

Dus, om de tweede vergelijking te kunnen oplossen heb je de beginhoogte en snelheid op het begintijdstip te nodig. Alleen ... hoe kom je daar aan ?

Eigenlijk vrij simpel : de eindhoogte en eindsnelheid van de 1e vergelijking (d.w.z. op het moment dat je je rugzak verliest !) is de beginhoogte en beginsnelheid voor de 2e vergelijking !

Bungeejump in het echt 4

Rugzak op verschillende tijden weggooien

We hebben al gezien dat de evenwichthoogte met of zonder rugzak verschillend is. Maar ... dan kan een flinke uitwijking voor de situatie met rugzak samenvallen met de evenwichtshoogte voor de vergelijking zonder rugzak !

Daarmee gaan jullie nu in Maple wat spelen :

- kies een massa voor de waaghals (mj = 60-80 kg)
- kies een massa voor de rugzak (mr = 15-25 kg)
- probeer een tijdstip (te = 100 - 175) voor het verliezen van de rugzak te vinden zodanig dat de waaghals op dat moment (vrijwel) exact stilhangt.
- probeer ook een tijdstip (te) voor het verliezen van de rugzak te vinden zodanig dat de waaghals een zo groot mogelijke slingering krijgt.