Eerste orde partiële differentiaalvergelijkingen

Vakgroep Differentiaalvergelijkingen

1995, 2001, 2002

1 Eerste orde golf-vergelijking

De vergelijking

$$au_x + u_t = 0\,,\; u = u(x,t)\,,\; a \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

beschrijft de beweging van een golf in één richting zonder dat de golf van vorm verandert. We zullen zien dat de konstante a de snelheid weergeeft waarmee de golf zich voortbeweegt. Vergelijking (1.1) staat ook wel bekend als de *transport vergelijking*.
We lossen de partiële differentiaalvergelijking op door krommen in het xt-vlak te bepalen waarop (1.1) teruggebracht wordt tot een gewone differentiaalvergelijking.
Laat C een geparametriseerde kromme $(x(s), t(s))$ in het xt-vlak zijn. Op C geldt dan

$$u(x,t) = u(x(s), t(s))\ .$$

Differentiatie naar s op C levert

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds}\ . \tag{1.2}$$

Vergelijken we (1.2) met (1.1) dan zien we dat wanneer

$$\frac{dx}{ds} = a \quad \text{en} \quad \frac{dt}{ds} = 1 \tag{1.3}$$

er geldt

$$\frac{du}{ds} = 0 \quad \text{op} \quad C\ . \tag{1.4}$$

Een kromme waarop (1.4) geldt heet een *karakteristieke kromme* of eenvoudigweg een *karakteristiek* van vergelijking (1.1), die in dit voorbeeld gedefinieerd wordt door (1.3). Uit (1.4) volgt dat de oplossing u van (1.1) konstant is op een karakteristiek.
Uit (1.3) vinden we als oplossingen

$$x(s) = as + x_0\ ,\ \ t(s) = s + t_0\ ,$$

waaruit na eliminatie van s volgt

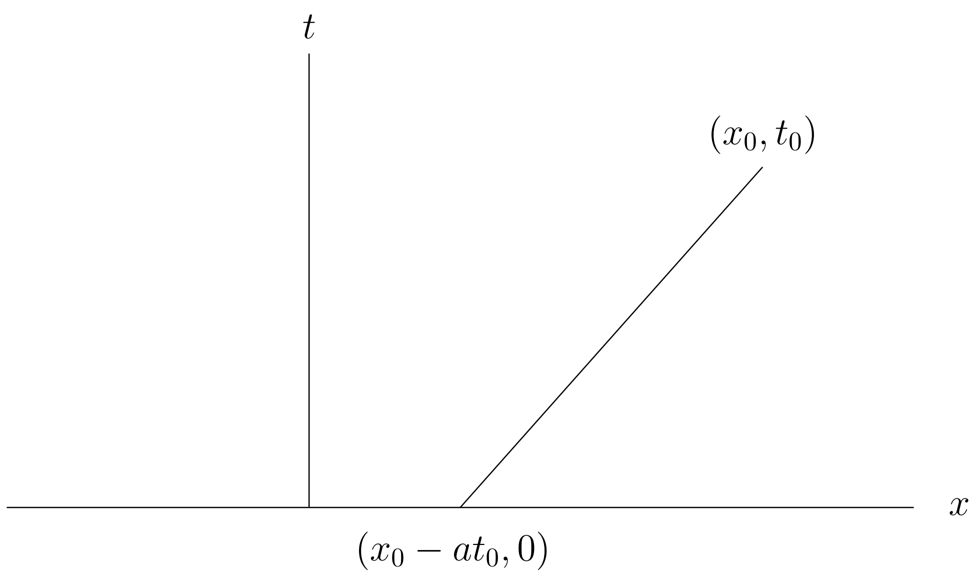
$$x = at + \text{konstante} \ .$$

De karakteristieke krommen C zijn in dit geval rechte lijnen in het xt-vlak.
De oplossing $u(x,t)$ verandert alleen als we naar een andere karakteristiek overgaan, en is dus slechts afhankelijk van de waarde van $x - at$. We schrijven dit met een willekeurige differentieerbare funktie F:

$$u(x,t) = F(x - at) \ . \tag{1.5}$$

Dit wordt ook wel de *algemene oplossing* van (1.1) genoemd, omdat iedere oplossing van (1.1) van deze vorm moet zijn. Voor een unieke oplossing zijn kennelijk aanvullende gegevens of voorwaarden noodzakelijk.
Een gebruikelijke voorwaarde is een voorschrift dat $u(x,t)$ voor een zekere waarde van t, zeg $t = 0$, met een voorgeschreven continu differentieerbare funktie overeenkomt. Wanneer we aan (1.1) een dergelijke *beginvoorwaarde* toevoegen spreken we van een *Cauchy-probleem*:

$$\begin{cases} au_x + u_t &= 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) &= f(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \end{cases} \tag{1.6}$$



De waarde van u in (x_0, t_0) bepalen we door te bekijken op welke karakteristiek dit punt ligt. Aangezien de waarde op de karakteristiek konstant is, is zij gelijk aan de waarde voor $t = 0$. De karakteristiek door (x_0, t_0) snijdt de x-as in $x_0 - at_0$, zodat

$$u(x_0, t_0) = u(x_0 - at_0, 0) = f(x_0 - at_0) \ . \tag{1.7}$$

<u>Voorbeeld</u>

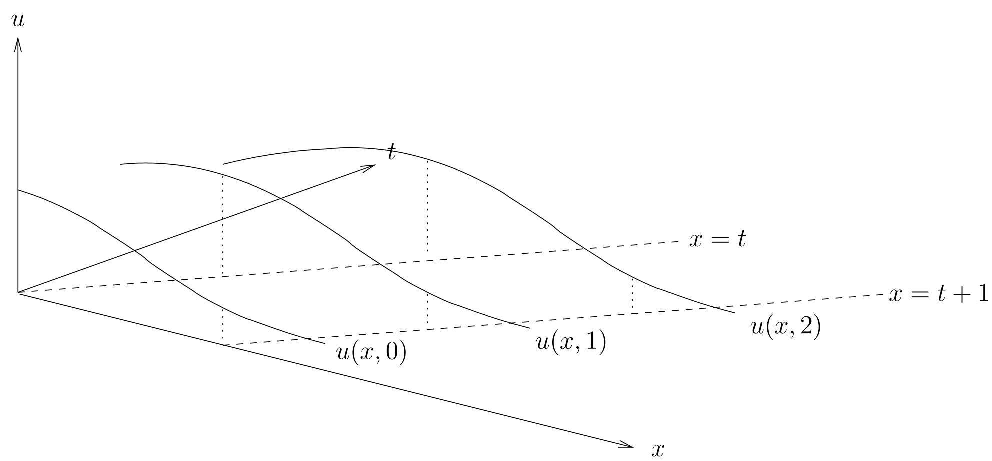
In het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u_x + u_t &= 0 \ , \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) &= \dfrac{1}{1+x^2} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \end{cases}$$

is $a = 1$ en $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. De oplossing wordt dan

$$u(x,t) = \frac{1}{1+(x-t)^2} \ .$$

De oplossing behoudt de vorm van de beginkromme en verplaatst zich langs de karakteristieken, de rechte lijnen $x - t =$ konstant.



■

De voorwaarde waaronder u uit (1.7) een oplossing is van (1.6) is dat f continu differentieerbaar is. Dan namelijk zijn u_x en u_t continu. Dit type oplossing wordt wel een *klassieke* of *sterke oplossing* genoemd.
Wanneer f slechts stuksgewijs continu differentieerbaar is, bijvoorbeeld

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \ , & -1 < x < 0 \ , \\ 1 - x \ , & 0 \leq x < 1 \ , \\ \quad 0 \ , & \text{elders,} \end{cases}$$

of zelfs slechts stuksgewijs continu, dan is het toch mogelijk om de oplossing u in nader te definiëren zin door middel van (1.7) te beschrijven. We gaan hier niet verder in op de vraag in welke zin u oplossing is, maar volstaan met op te merken dat we u in dit geval een *zwakke* of *gegeneraliseerde oplossing* noemen.

<u>Voorbeeld</u>

Het beginwaardeprobleem

$$
\left\{ \begin{array}{lll} -2u_x + u_t & = 0 \ , & x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0 \ , \\ u(x,0) & = \left\{ \begin{array}{cl} 0 \ , & |x| > 1 \ , \\ 1 - |x| \ , & |x| \leq 1 \ , \end{array} \right. & \end{array} \right.
$$

heeft als gegeneraliseerde oplossing

$$
u(x,t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 \ , & x > 1 - t \ , \\ 1 - |x + 2t| \ , & -1 - t < x < 1 - t \ , \\ 0 \ , & x < -1 - t \ . \end{array} \right.
$$

$\blacksquare$

Opgaven

1. Bereken de oplossing $u(x,t)$ van het beginwaarde-probleem

$$
\left\{ \begin{array}{lll} 2u_x + u_t & = 0 \ , & x \in \mathbb{R} \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) & = f(x) \ , & x \in \mathbb{R} \ , \end{array} \right.
$$

   voor de volgende funkties f. Geef aan of er sprake is van een sterke of zwakke oplossing,

   (a) $f(x) = e^{-x^2} \ , \ x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = e^{|x|} \ , \ x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \, , & |x| > 1 \ , \\ 1 \, , & |x| \leq 1 \ . \end{array} \right.$

2. Gegeven het beginwaarde-probleem

$$
\left\{ \begin{array}{lll} 3u_x + u_t & = 5 \, , & x \in \mathbb{R} \, , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) & = e^x \, , & x \in \mathbb{R} \, . \end{array} \right.
$$

   Pas de transformatie $u(x,t) = v(x,t) + 5t$ toe en bereken de oplossing $v(x,t)$. Bereken vervolgens $u(x,t)$.

3. Gegeven het beginwaarde-probleem

$$
\left\{ \begin{array}{lll} 4u_x + u_t & = u \, , & x \in \mathbb{R} \, , \quad t > 0 \\ u(x,0) & = \cos x \, , & x \in \mathbb{R} \, . \end{array} \right.
$$

   Pas de transformatie $u(x,t) = e^t \ v(x,t)$ toe en bereken de oplossing $v(x,t)$. Bereken vervolgens $u(x,t)$.

2 Goed-gestelde problemen

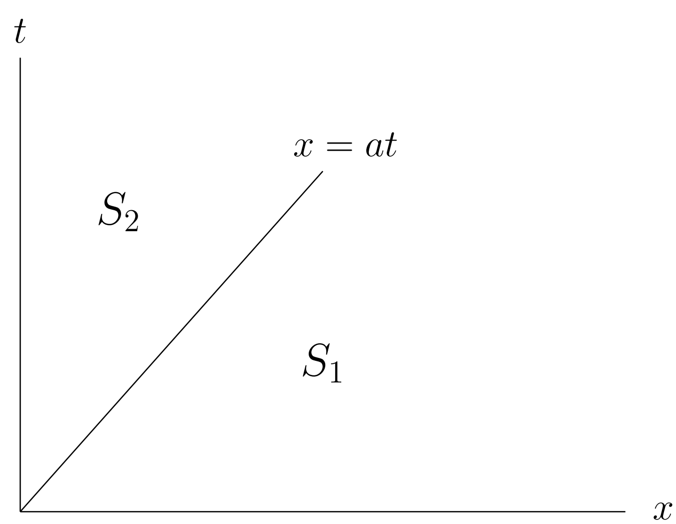
We hebben in §1.1 gezien dat de partiële differentiaalvergelijking $au_x + u_t = 0$ oneindig veel oplossingen heeft. Door een aanvullende voorwaarde op te leggen, in dit geval een beginwaarde, konden we tot een unieke oplossing komen.
We noemen een probleem *goed-gesteld* wanneer het aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. er bestaat een oplossing van het probleem (*existentie*),
2. er is precies één oplossing van het probleem (*uniciteit*),
3. de oplossing hangt continu af van de begin- en/of randvoorwaarden (*stabiliteit*).

Wanneer we een model maken van een fysisch probleem met behulp van een partiële differentiaalvergelijking dan proberen we door middel van aanvullende voorwaarden een goed-gesteld probleem te formuleren. Leggen we te weinig voorwaarden op dan kan de oplossing niet-uniek zijn, leggen we te veel voorwaarden op dan kan het zijn dat er geen oplossing bestaat.
De stabiliteits-eis houdt bijvoorbeeld in dat een kleine meetfout in de beginwaarden geen grote verstoring in de oplossing kan veroorzaken. We komen op deze voorwaarde in de volgende hoofdstukken nog nader terug.

We laten nu zien wat goed-gesteldheid inhoudt voor de transportvergelijking. Wanneer we de vergelijking op het gebied $0 < x < \infty$ bekijken voor $a > 0$,

$$\begin{cases} au_x + u_t &= 0\,, \qquad 0 < x < \infty\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad 0 < x < \infty\,, \end{cases} \tag{2.8}$$



dan is de oplossing $u(x,t) = f(x - at)$ alleen gedefinieerd op het gebied
$S_1 = \{(x,t) \mid x > at\}$. Voor $S_2 = \{(x,t) \mid 0 < x < at\}$ is de oplossing onbepaald omdat er geen beginwaarde is gedefinieerd op karakteristieken met $x - at < 0$.

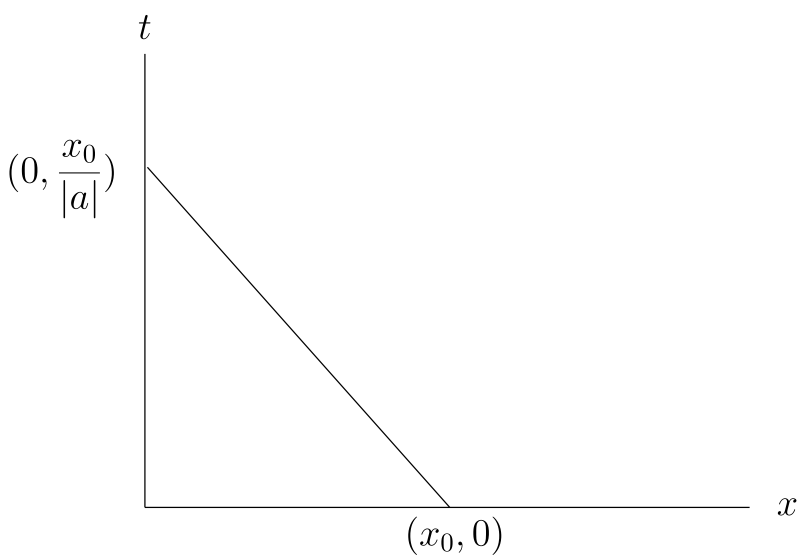
Door de *randwaarde* op $x = 0$ vast te leggen kunnen we tot een goed-gesteld *begin-randwaarde probleem* komen:

$$\begin{cases} au_x + u_t &= 0 \ , \quad 0 < x < \infty \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) &= f(x) \ , \quad 0 < x < \infty \ , \\ u(0,t) &= g(t) \ , \quad t > 0 \ . \end{cases} \tag{2.9}$$

In S_1 wordt de oplossing bepaald door de beginvoorwaarde, in S_2 door de randvoorwaarde:

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x-at), & x > at \ , \\ g(t - \dfrac{x}{a}), & 0 < x < at \ . \end{cases} \tag{2.10}$$

Wanneer $a < 0$ is, is het probleem (2.9) niet goed-gesteld. Voor een zekere $x_0 > 0$ liggen dan de punten $(x_0, 0)$ en $(0, \dfrac{x_0}{|a|})$ op dezelfde karakteristiek.



De beginvoorwaarde geeft $u(x_0,0) = f(x_0)$, de randvoorwaarde $u(0, \dfrac{x_0}{|a|}) = g(\dfrac{x_0}{|a|})$. Aangezien u konstant is op een karakteristiek moet dus gelden

$$f(x_0) = g(\frac{x_0}{|a|}) \text{ voor willekeurige } x_0 > 0 \ .$$

Voor willekeurige funkties f en g van het probleem (2.9) zal dit in het algemeen niet het geval zijn.

Opgaven

1. Bereken de oplossing van het volgende begin-randwaardeprobleem. Maak een schets van de oplossing op de tijdstippen $t = 0, 1$ en 2.

$$\begin{cases} u_x + u_t &= 0 \ , \qquad 0 < x < \infty \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) &= e^{-x^2} \ , \quad 0 < x < \infty \ , \\ u(0,t) &= 1 \ , \qquad\qquad t > 0 \ . \end{cases}$$

2. Bereken de oplossing van het volgende begin-randwaardeprobleem. Maak een schets van de oplossing op de tijdstippen $t = 0, 1$ en 2.

$$\begin{cases} 3u_x + u_t &= 0 \ , \ 0 < x < \infty \ , \ t > 0 \ , \\ u(x,0) &= 0 \ , \ 0 < x < \infty \ , \\ u(0,t) &= \begin{cases} t \ , & 0 < t < 1 \ , \\ 1 \ , & t \geq 1 \ . \end{cases} \end{cases}$$

3. Welke voorwaarden moeten we aan f en g van het probleem (2.9) opleggen wil de oplossing (2.10) continu differentieerbaar zijn?

3 Lineaire eerste orde vergelijkingen

Wanneer een eerste orde partiële differentiaalvergelijking geschreven kan worden als

$$a(u,x,t)u_x + b(u,x,t)u_t = c(u,x,t) \tag{3.11}$$

dan heet hij *quasi-lineair*.
Een speciale klasse vormen de *lineaire* vergelijkingen, die geschreven kunnen worden als

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t = c(x,t)u + d(x,t) \, . \tag{3.12}$$

Als $d \equiv 0$ is dan heet de vergelijking *homogeen*.

We gaan nu voor het algemene lineaire beginwaarde-probleem

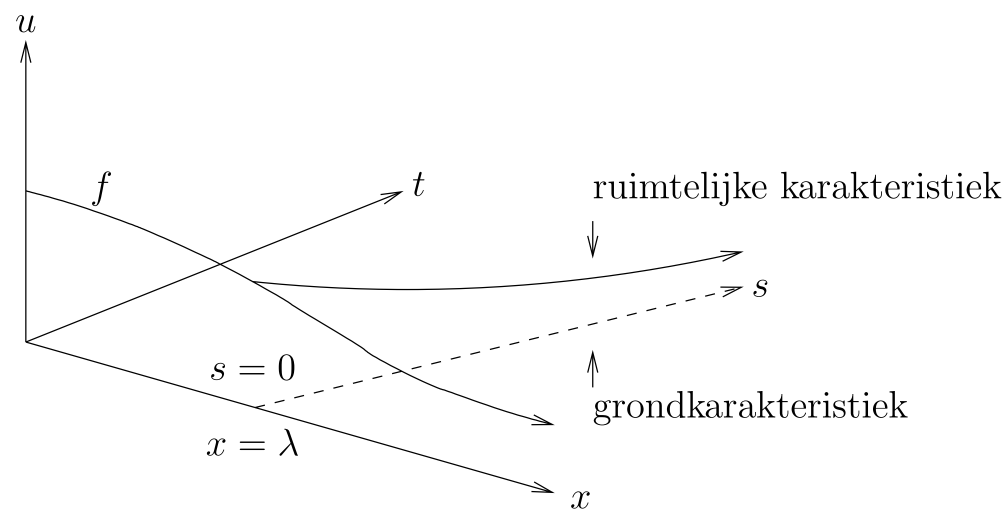
$$\begin{cases} a(x,t)u_x + b(x,t)u_t = c(x,t)u + d(x,t) \, , & x \in \mathbb{R} \, , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) = f(x) \, , & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.13}$$

met behulp van de zogenaamde *karakteristiekenmethode* een oplossing construeren, op identieke wijze als voor het probleem (1.6).

We hebben gezien dat oplossingen van vergelijking (1.1) gegeven konden worden met behulp van karakteristieken, de lijnen $x - at =$ konstant. De konstante noemen we λ. Hiermee hebben we een parameter gekregen waarmee we onderscheid kunnen maken tussen de verschillende karakteristieken. Een logische parametrisatie van de karakteristieken is dan

$$x = as + \lambda \ , \ t = s \ .$$

De parametrisatie is zodanig gekozen dat s de positie op de karakteristiek aangeeft terwijl $s = 0$ correspondeert met het snijpunt $(\lambda, 0)$ in het xt-vlak van de karakteristiek met x-as.



We hebben hiermee ook direct een parametrisatie van de beginkromme gevonden, immers voor $s = 0$ is

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(0) = & \lambda \ , \\ t(0) = & 0 \ , \\ u(0) = & f(\lambda) \ . \end{array} \right. \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \ , \tag{3.14}$$

Wanneer we van een algemene parametrisatie van de karakteristiek C_λ uitgaan,

$$x = x(s) \ , \ t = t(s) \text{ op } C_\lambda \ ,$$

dan wordt aan (3.13) op C_λ voldaan als x,t en u oplossing zijn van het *karakteristieke stelsel*

$$\frac{dx}{ds} = \ a(x,t) \ , \ x(0) = x_0(\lambda) \ , \tag{1.15.a}$$

$$\frac{dt}{ds} = \ b(x,t) \ , \ t(0) = t_0(\lambda) \ , \tag{1.15.b}$$

$$\frac{du}{ds} = \ c(x,t)u + d(x,t) \ , \ u(0) = u_0(\lambda) \ . \tag{1.15.c}$$

Doordat de funkties a en b niet van u afhangen kunnen de vergelijkingen (1.15.a) en (1.15.b) onafhankelijk van (1.15.c) opgelost worden. Oplossingen van deze vergelijkingen definiëren karakteristieken in het xt-vlak en heten ook wel *grondkarakteristieken*. Oplossingen van (1.15.a)-(1.15.c) definiëren zogeheten *ruimtelijke karakteristieken*.
Bij iedere waarde van λ heeft dit stelsel een oplossing die een ruimtelijke karakteristiek voorstelt. Al deze karakteristieken samen beschrijven het oplossingsoppervlak $u(x,t)$ in de xtu-ruimte, zij het door middel van de parameters s en λ:

$$x = x(s,\lambda) \ , \ t = t(s,\lambda) \ , \ u = u(x(s,\lambda), t(s,\lambda)) \ . \tag{3.18}$$

Voorbeeld

Het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} xu_x + u_t & = -u\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) & = \sin(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

heeft als karakteristiek stelsel

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \quad x\ , \quad x(0) = \lambda\ , \\ \frac{dt}{ds} &= \quad 1\ , \quad t(0) = 0\ , \\ \frac{du}{ds} &= -u\ , \quad u(0) = \sin\lambda\ . \end{aligned}$$

De parametrisatie van de oplossing is

$$x = \lambda e^s\,,\ t = s\,,\ u = e^{-s}\sin\lambda\ . \qquad \blacksquare$$

Merk op dat $u(x,t) \neq u(s,\lambda)$! In het algemeen:

$$u(x,t) = u(x(s,\lambda), t(s,\lambda)) = U(s,\lambda)$$

Volgens de impliciete funktiestelling bestaan de inverse funkties

$$s = s(x,t)\,,\ \lambda = \lambda(x,t)$$

in de omgeving van $s = 0$ als de *Jacobiaan* ongelijk aan nul is:

$$J(x,t) = \left|\frac{\partial(x,t)}{\partial(s,\lambda)}\right| = \begin{vmatrix} x_s & x_\lambda \\ t_s & t_\lambda \end{vmatrix} = x_s t_\lambda - x_\lambda t_s \neq 0 \tag{3.19}$$

Deze voorwaarde betekent dat aan de beginkromme de eis gesteld wordt dat deze niet de karakteristieke richting heeft. Wanneer de beginwaarde is gedefinieerd op een willekeurige (differentieerbare) kromme in het xt-vlak betekent (3.19) dat de beginkromme in geen enkel punt de karakteristieke richting heeft.

Voorbeeld

Voor de parametrisatie uit het vorige voorbeeld is

$$J(x,t) = \begin{vmatrix} \lambda e^s & e^s \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = e^s \neq 0 \text{ voor alle } s\ .$$

Inverteren van $x = \lambda e^s$, $t = s$ geeft

$$s = t \ , \ \lambda = xe^{-t} \ ,$$

zodat de oplossing u gegeven wordt door $u = u(x,t) = \sin(xe^{-t})\ e^{-t}$. ■

Opgaven

1. Bepaal tot welke klasse (lineair, quasi-lineair, ...) de volgende vergelijkingen behoren, en geef aan of de vergelijking homogeen of inhomogeen is.

   (a) $u_x + tu_t = 0$

   (b) $u_x + uu_t = x$

   (c) $u_x + tu_t = u^2$

   (d) $u_x + \sin x\, u_t = x$

   (e) $u_x + u_t^2 = 0$

2. Kan het volgende probleem met behulp van de karakteristieken-methode opgelost worden? Geef een verklaring.

$$\begin{cases} u_x + u_y &= 0 \ , \quad x, y \in \mathbb{R} \\ u(x,y) &= 2 \ , \quad \text{voor} \quad y = x \end{cases}$$

3. Bepaal met behulp van de karakteristieken methode de oplossing van de volgende beginwaarde problemen. Geef aan in welk gebied de oplossing geldig is.

   (a) $\begin{cases} u_x + xu_t &= u^2 \ , \quad x > 0 \ , \quad t > 0 \\ u(x,0) &= 1 \ , \quad x > 0 \ . \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} tu_x + u_t &= x \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \quad t > 0 \\ u(x,0) &= x^2 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} xu_x - tu_t &= 0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \quad t > 0 \\ u &= x^2 \ , \quad \text{op } x = t \ . \end{cases}$

4 Quasi-lineaire vergelijkingen

De methode uit de vorige paragraaf kan uitgebreid worden naar quasi-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. Ook kunnen willekeurige beginkrommen worden beschouwd. We beschouwen het gegeneraliseerde beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u) \ , & (x,t)\,\epsilon\, D \ \subset \ \mathbb{R}^2 \ , \\ x = x_0(\lambda)\,,\ t = t_0(\lambda)\,,\ u = u_0(\lambda) \ , & \lambda\,\epsilon\,\Lambda \ \subset \ \mathbb{R} \ . \end{cases} \tag{4.20}$$

De beginkromme B voor de quasi-lineaire vergelijking is een ruimtelijke kromme (x_0, t_0, u_0), die geparametriseerd wordt met λ.
De oplossing $u = u(x, t)$ stelt een *oppervlak* voor in de xtu-ruimte. De beginkromme B ligt geheel in dit oppervlak. De methode die we afleiden om dit oppervlak te bepalen zal sterk overeenkomen met die uit de vorige paragrafen.

Eerst beschouwen we het vectorveld $(a(x, t, u), b(x, t, u), c(x, t, u))$. In ieder punt (x, t, u) van de xtu-ruimte definieert dit vectorveld een richting. We zoeken nu de krommen die in ieder punt (x, t, u) de richting van het vector-veld aannemen. Langs deze kromme C_λ nemen we de parameter s, zodat we voor C_λ de volgende parametrisering krijgen:

$$(x(s), t(s), u(s)) \ .$$

We wensen dat deze kromme in ieder punt de richting van het vectorveld heeft. Er moet dan gelden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x(s), t(s), u(s)) \\ \frac{dt}{ds} &= b(x(s), t(s), u(s)) \\ \frac{du}{ds} &= c(x(s), t(s), u(s)) \end{aligned} \tag{4.21}$$

De krommen die aan dit stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen voldoen noemen we kortweg *karakteristieken* van vergelijking (4.20).
We bekijken nu de verzameling van krommen die gaan door de punten van de beginkromme $B(\lambda)$. Om dit te bereiken voegen we aan het stelsel (4.21) de volgende beginwaarden toe:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0(\lambda) \\ t(0) &= t_0(\lambda) \\ u(0) &= u_0(\lambda) \end{aligned} \tag{4.22}$$

De oplossing van het stelsel (4.21) met de beginwaarden (4.22) kunnen we formeel schrijven als

$$x = x(s, \lambda) \ , \ t = t(s, \lambda) \ , \ u = u(s, \lambda) \ . \tag{4.23}$$

Voorbeeld

Het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} yu_x - xu_y &= u \ , \quad x > 0 \ , \ y > 0 \ , \\ u &= 1 \ , \quad \text{op } xy = 1 \ , \end{cases}$$

heeft als karakteristiek stelsel

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \quad y \ , \quad x(s=0) = \lambda \ , \\
\frac{dy}{ds} &= -x \ , \quad y(s=0) = \frac{1}{\lambda} \ , \\
\frac{du}{ds} &= \quad u \ , \quad u(s=0) = 1 \ .
\end{aligned}
$$

De oplossing voor u is eenvoudig te berekenen: $u = e^s$. De vergelijkingen voor $x(s)$ en $y(s)$ vormen een stelsel gekoppelde gewone differentiaalvergelijkingen, met als oplossing

$$
x(s,\lambda) = \frac{\sin(s) + \lambda^2 \cos(s)}{\lambda} \ , \ y(s,\lambda) = -\frac{\lambda^2 \sin(s) - \cos(s)}{\lambda} \ .
$$

■

Een expliciete relatie $u = u(x,t)$ wordt gevonden als de inverse transformatie $s = s(x,t)$, $\lambda = \lambda(x,t)$ bepaald kan worden.

$$
u(x,t) = U(s(x,t), \lambda(x,t)) \tag{4.24}
$$

<u>Voorbeeld</u>

De Jacobiaan voor de funkties $x(s,\lambda)$ en $y(s,\lambda)$ uit het vorige voorbeeld is

$$
J = \begin{vmatrix} \dfrac{-\lambda^2 \sin(s) + \cos(s)}{\lambda} & 2\cos(s) - \dfrac{\sin(s) + \lambda^2\cos(s)}{\lambda^2} \\ -\dfrac{\sin(s) + \lambda^2 \cos(s)}{\lambda} & -2\sin(s) + \dfrac{\lambda^2 \sin(s) - \cos(s)}{\lambda^2} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^3} \ .
$$

Aangezien $x > 0$ is, en dus ook $\lambda > 0$, hoeven we alleen voor $\lambda = 1$ problemen te verwachten. Het is in dit voorbeeld niet mogelijk s en λ als funkties van x en y te schrijven. ■

Al met al hebben we in deze paragraaf een methode afgeleid voor het quasi-lineaire Cauchy probleem (4.20). De methode bestaat uit het oplossen van het karakteristieke stelsel (4.21), (4.22), en het uitdrukken van s en λ in funkties van x en t. Hierbij hebben we ons niet te veel bezig gehouden met de vraag wanneer het een en ander toepasbaar is!

Opgaven

1. Los het volgende quasi-lineaire beginwaardeprobleem op met hulp van de karakteristieken-methode, en geef aan waar de oplossing geldig is.

$$\begin{cases} x^2 u_x + t^2 u_t = u^2 \ , & x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0 \ , \\ u(x, 4x) = 1 \ , & x \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

2. Los de volgende beginwaardeproblemen op met hulp van de karakteristieken-methode.

   (a) $\begin{cases} u_x + u_t = u \ , & x \in \mathbb{R} \ , \ t > 1 \ , \\ u(x,1) = e^{-x^2} \ , & x \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x u_x + t u_t = 1 \ , & x \in \mathbb{R} \ , \ t > 1 \\ u(x,1) = \sin x \ , & x \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$

3. We beschouwen de volgende coördinaten-transformatie:

$$\begin{cases} \xi = 3x + y \\ \eta = e^x \end{cases}$$

   (a) Bepaal ξ_x, ξ_y, η_x en η_y. Waarom is de transformatie inverteerbaar ?

   (b) Bepaal x_ξ, x_η, y_ξ en y_η door impliciet differentiëren van de bovenstaande transformatieformules.

   (c) Druk x en y uit in ξ en η (bepaal de inverse transformatie). Controleer het antwoord bij (b).