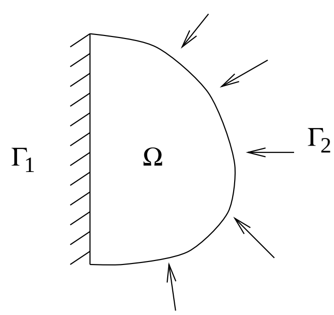
TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Informatietechnologie en Systemen

Numerieke Analyse CII (wi4014)
Numerieke Methoden PDV (wi3001)
2001/2002 Tweede Serie



Figuur 1: Een in zijn vlak belaste plaat

1. Beschouw een in zijn vlak belaste plaat die aan één zijde is ingeklemd zoals aangegeven in figuur 1. De ingeklemde rand wordt aangeduid met Γ_1, de rand waar de belasting wordt uitgeoefend met Γ_2. E is de elasticiteitsmodulus en ν de dwarscontractiecoëfficiënt. Definieer de constanten A en B als volgt:

$$A = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad B = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

De formule voor de potentiële energie U_{pot} luidt:

$$U_{pot} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \{A\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}) + B(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + A\frac{\partial v}{\partial y}(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})\}d\Omega +$$
$$- \int\limits_{\Omega} \rho(b_1 u + b_2 v)d\Omega - \int\limits_{\Gamma_2} (t_1 u + t_2 v)d\Gamma$$

Hierin is $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de onbekende verplaatsing, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ een voorgeschreven verdeelde belasting en $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ een uitwendige kracht op rand Γ_2.
Op de ingeklemde rand Γ_1 geldt dat de verplaatsing $\boldsymbol{u}$ gelijk aan 0 is.

Opgave:	Leid de Euler-Langrange vergelijkingen voor dit probleem af. Het is niet toegestaan stelling 4.3 te gebruiken. Hoe luiden de natuurlijke randvoorwaarden?
Aanwijzing:	Stel $u = \hat{u} + \varepsilon\varphi$ en $v = \hat{v} + \varepsilon\psi$. Aan welke voorwaarden moeten φ en ψ voldoen op de rand?

2. Gegeven is op het gebied $\Omega \subset I\!R^2$ met rand $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_2$ de PDV

$$-div(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p) + \frac{h}{2}u = 0 \ ,$$

met h en u gegeven functies en μ een contante.
Deze vergelijking staat bekend onder de naam Reynoldsvergelijking en wordt in de tribologie gebruikt om de drukopbouw in een olielager te beschrijven. p is de druk, μ een viscositeitsconstante, h de filmhoogte en u de oliesnelheid.
De bijbehorende randvoorwaarden luiden:

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{op} \quad \Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \quad \text{op} \quad \Gamma_2 \\ \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial n} + \sigma(p - p_0) &= 0 \quad \text{op} \quad \Gamma_3 \ . \end{aligned}$$

Hierin is $\boldsymbol{n}$ de naar buiten gerichte normaal en zijn σ en p_0 constanten.

a) Geef het met dit probleem corresponderende minimaliseringsprobleem.
b) Men lost dit probleem op met de EEM en gebruikt lineaire, driehoekige elementen. Men noteert de hoekpunten van het standaardelement met x_i, x_j en x_k.

Bereken m.b.v. Newton Cotes formules

(i) het element (i, j) van de elementsmatrix voor de inwendige driehoek
(ii) de elementsvector van de inwendige driehoek
(iii) de elementmatrix en elementsvector voor een randelement op Γ_3
(iv) Op welke wijze worden de randvoorwaarden op Γ_1 en Γ_2 verwerkt?

wi4014 inleveren vóór 1 februari 2002