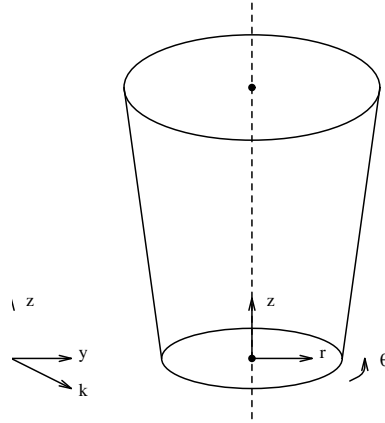


**Opgaven**  
**Numerieke Analyse CII (wi4014)**  
**Numerieke Methoden PDV (wi3001)**  
**2001/02 Serie 3**



Figuur 1: cilinder  $\Omega$

1. Binnen een cilinder  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  is de convectie-diffusievergelijking gegeven:

$$-\Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \quad (1)$$

met  $\mathbf{u}$  en  $f$  van de plaats afhankelijke grootheden.

De coefficienten  $\mathbf{u}$  en  $f$  en de randvoorwaarden zijn onafhankelijk van de hoek  $\Theta$ . De randvoorwaarden van (1) luiden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \text{ op het ondervlak} \\ T &= 1 \text{ op de buitenmantel} \\ \frac{\partial T}{\partial n} + k(T - T_0) &= 0 \text{ op het bovenzvlak} \end{aligned} \quad (2)$$

met  $k$  en  $T_0$  gegeven konstanten.

- (a) Laat zien dat de oplossing  $T$  van (1) onafhankelijk van  $\Theta$  is.
- (b) Leid voor  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  het bij (1) behorende equivalente minimaliseringsprobleem af.
- (c) Hoe luiden de bijbehorende Ritzvergelijkingen?
- (d) Voor  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  bestaat er geen equivalent minimaliseringsprobleem. Waarom niet?
- (e) Geef een zwakke formulering van (1), (2), waarin afgeleiden van zo laag mogelijke orde voorkomen. (Galerkin)
- (f) Aan welke randvoorwaarden moeten de test functies voldoen?
- (g) Leid de Galerkin vergelijkingen voor (1) en (2) af. Laat zien dat voor  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  deze identiek zijn aan de Ritzvergelijkingen in (c).

- (h) Doe de EEM met behulp van de zwakke formulering in (e). Neem basisfuncties die lineair zijn in  $r$  en  $z$  en konstant in  $\Theta$ . De bijbehorende elementen zijn dus cirkelvormig en hebben een driehoekige doorsnede in het  $\Theta = 0$ ,  $r \geq 0$  vlak.
- i. Laat zien hoe het matrix element  $s_{ij}$  van de elementmatrix behorend bij het element kan uitgedrukt in de coördinaten van de hoekpunten en de functiewaarden van  $\mathbf{u}$  in de hoekpunten.
  - ii. Bereken de elementenvector van het driehoekige element.
  - iii. Bereken de elementmatrix en elementvector van het randelement. (lijnelement)

Maak voor deze onderdelen gebruik van de Newton-Côtesregel.

**wi4014 inleveren vóór 1 maart 2002.**