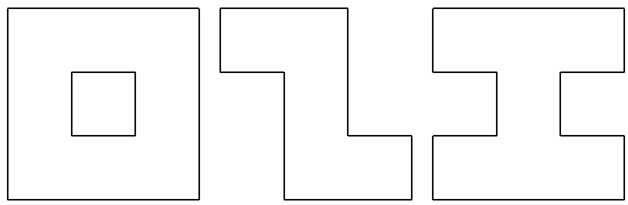
TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica

Numerieke Analyse CII (wi4014tu)
Numerieke Methoden PDV (wi3001)
Vierde Serie
2001/2002



Figuur 1: Gebieden bij vraag 1

1. Men wil de Poisson vergelijking oplossen op de gebieden uit figuur 1. Geef een (korte) motivering of u een profielmethode of een bandmethode wilt gebruiken. Beschrijf in het geval van een bandmethode welke nummering u gebruikt.

2. Van een diagonaal-bloktridiagonale matrix A is gegeven, dat hij de volgende structuur bezit:

$$A = \begin{pmatrix} I_1 & A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A_1^T & I_2 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{n-2}^T & I_{n-1} & A_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{n-1}^T & I_n \end{pmatrix}$$

Hierin zijn de I_j $k_j \times k_j$ eenheidsmatrices, $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = N$. Voorts is gegeven, dat A positief definiet is met eigenwaarden

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N > 0$$

(a) Laat zien, dat als μ eigenwaarde is van $B = A - I$, dan ook $-\mu$. (Hint: Beschouw $(B - \mu I)\boldsymbol{x} = 0$, zet $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$, met

$$T = \begin{pmatrix} I_1 & & & & \\ & -I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (-1)^{(n-2)} I_{n-1} & \\ & & & & (-1)^{(n-1)} I_n \end{pmatrix}$$

en vermenigvuldig alles met T.)

(b) Laat zien, dat de grootste eigenwaarde van A kleiner is dan 2.

(c) Laat $C(\lambda) = \lambda(I + U^T) + U$.
Laat zien, dat $M_L C(\lambda) M_R = B + \sqrt{\lambda} I$, met

$$M_L = \begin{pmatrix} I_1 & & & & \\ & I_2/\sqrt{\lambda} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_{n-1}/(\sqrt{\lambda})^{n-2} & \\ & & & & I_n/(\sqrt{\lambda})^{n-1} \end{pmatrix}$$

en $M_R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} M_L^{-1}$. Toon met behulp hiervan aan, dat de spectraalradius van de Gauss-Seidel iteratie matrix gelijk is aan $(\lambda_1 - 1)^2$.
(Hint: bereken $\det(M_L C M_R)$ en $\det(M_L M_R)$. Let op: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, maar $\det(\alpha A) \neq \alpha \det(A)$.)

(d) Laat $\lambda_1 = 1.99$. Beantwoord de vragen van oefening 11.7 (blz 218).

3. De warmtevergelijking in één ruimtedimensie op het interval (0,1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, u(x,t_0) = u_0(x)$$

wordt met de methode der lijnen en de EEM gediscretiseerd tot

$$M \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = S\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$$

(a) Laat zien, dat dit stelsel precies één evenwichtsoplossing $\boldsymbol{u}_E$ bezit.

(b) Laat zien, dat er een $\gamma > 0$ bestaat zodat

$$\|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_E\|_M^2 \leq e^{-\gamma(t-t_0)} \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_E\|_M^2$$

Hierin is $\|\boldsymbol{u}\|_M = (\boldsymbol{u}, M\boldsymbol{u})^{\frac{1}{2}}$. Maak gebruik van (14.61) en ga op dezelfde wijze te werk als in het bewijs van stelling 14.1.

4. Oefening 16.4 (blz 287).

wi4014tu inleveren vóór 1 april 2002