TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Informatietechnologie en Systemen

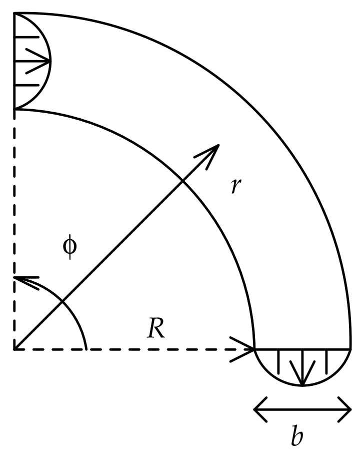
Practicum Opgave 1.2.4
Numerieke Analyse CII (wi4014)
Numerieke Methoden PDV (wi3001)

De verspreiding van verontreinigde stof door een stromend medium kan beschreven worden door de convectie-diffusie vergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - div(\kappa \nabla c) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla c = f \tag{1}$$

Hierin is $c(\boldsymbol{x}, t)$ de concentratie verontreinigde stof, κ de diffusiecoefficient, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ de stroomsnelheid en $f(\boldsymbol{x}, t)$ de representatie van eventuele inwendige verontreinigingsbronnen. In deze opgave beschouwen we de evenwichtstoestand met $f \equiv 0$ en dus:

$$-div(\kappa \nabla c) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla c = 0 \tag{2}$$



We bekijken nu de stroming in een cirkelvormige kanaalbocht aangegeven in de figuur.
De binnenstraal heeft lengte R de breedte van kanaal is b.

Het snelheidsveld wordt gegeven door de volgende formules:

$$u_r = 0 \quad r u_\phi = \frac{1}{4}(r - (R + b))(r - R) \tag{3}$$

$$u_x = -r \sin\phi \, u_\phi \quad u_y = r \cos\phi \, u_\phi \tag{4}$$

We nemen aan dat de wand zwak doorlatend is m.b.t. concentratie c. Aan de instroming brengen we een "blokje" vervuiling aan ter lengte van $\frac{1}{2}b$ welke in het midden van het kanaal is gecentreerd.

De randvoorwaarden voor de concentratie worden daarmee:

instroming: $\quad c = 1 \qquad R + \frac{1}{4}b \leq r \leq R + \frac{3}{4}b$

$$c = 0 \qquad R \leq r \leq R + \frac{1}{4}b \quad \text{en} \quad R + \frac{3}{4}b \leq r \leq R + b \tag{5}$$

wanden van kanaal: $$\kappa \frac{\partial c}{\partial n} + \sigma c = 0 \tag{6}$$

uitstroming: $$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \tag{7}$$

z.o.z.

Opgave:

a. Bestaat er voor vergelijking (2) met randvoorwaarden (5), (6) en (7) een equivalent minimaliseringsprobleem? Beredeneer uw antwoord.

b. Leid de zwakke formulering voor (2) onder de randvoorwaarden (5), (6), (7) af.

c. Voor het benaderen van de oplossing van dit probleem wordt de eindige elementen methode gebruikt.
Leid de elementmatrices en vectoren af voor de interne elementen indien de elementen driehoekig zijn en een lineaire benadering wordt gekozen.
Doe hetzelfde voor de randelementen.

d. Los het probleem op m.b.v. het SEPRAN pakket.
Gebruik $R = 3$ en $b = 1$
Kies $\kappa = 0.005$, $\sigma = 0.01$ en los het probleem op met 2 verschillende gridverfijningen.
Maak een print van de concentratie, alsmede een contourplot.
Maak op een kleuren display een gekleurde contourplot.

e. Verklaar het concentratiebeeld van de contourplot.

f. Voer dezelfde berekening uit voor $\kappa = 0.00005$, $\sigma = 0.01$.
Verklaar de resultaten.