TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Informatietechnology en Systemen

Numerieke Wiskunde b.o. (wi4012)
Numerieke Analyse CII (wi4014)
Numerieke Methoden PDV (wi3001)
2001/02 Eerste Serie

1. Beschouw de PDV
$$-\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) = f \tag{1}$$
met $k = k(x, y)$ een gegeven (positieve) funktie van x en y.
De dv (1) moet opgelost worden op een vierkant gebied $(0, 1) \times (0, 1)$.

   Op de rand geldt de randvoorwaarde $\quad u = 1 \qquad (2)$

   Voor het oplossen gebruiken we centrale differenties en een equidestant rooster ($\Delta x = \Delta y = h$).

   a Leid de differentie formule voor de dv (1) af.

   b Het stelsel lineaire vergelijkingen wordt geschreven in de vorm $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}$.
   Laat zien dat de matrix A symmetrisch is.

   c We gebruiken het rooster van figuur 3.9 uit het diktaat.
   Stel $v_{(j-1)(N-1)+i} = u_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, ..., N-1, \quad j = 1, 2, ..., N-1.$
   Kies $k(x, y) \equiv 1$ en geef de preciese vorm van de matrix A en de vektor F.

   d Laat zien dat de matrix A positief semi definiet is, als k positief is. k is nu weer een funktie van x en y.

2. Beschouw de vergelijking
$$-\text{div } k\nabla T + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = f$$
op de driehoek als aangegeven op de tekening in oefening 3.15 van het dictaat.

Als randvoorwaarde is gegeven

$$\begin{array}{lll} \text{op} & x=0: & T=1 \\ \text{op} & y=0\,,\quad 0\le x\le 1/2 & T=1-x \\ \text{op} & y=0\,,\quad 1/2<x<1 & \partial T/\partial n=0 \\ \text{op} & x+y=1: & 3T+k\partial T/\partial n=0 \end{array}$$

Hierbij zijn k en f gegeven funkties en is $\boldsymbol{u}$ een gegeven snelheid.
k en f hangen af van de positie (x, y).

Maak een differentie schema dat consistent is van de tweede orde. (Gebruik dus een eindige differentie methode). Besteed in het bijzonder aandacht aan de verwerking van de randvoorwaarden op $x + y = 1$ en op $y = 0$.

3. De Stokes vergelijking voor een stroming met constante viskositeit luidt:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\mu\Delta v + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \text{div } \boldsymbol{u} &= 0 \\ \boldsymbol{u} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Men wil deze vergelijking discretizeren m.b.v. een eindige volume methode op het vierkant $(0, 1) \times (0, 1)$, gebruik makend van een equidestant grid.
We nemen aan dat de snelheid $\boldsymbol{u}$ op de gehele rand is gegeven.

We nemen een "staggered grid" aan zoals beschreven in het dictaat. De druk p wordt genomen in het centrum van de cel. Voor het discretizeren van de continuiteitsvergelijking div $\boldsymbol{u} = 0$, kiezen we als controle volumes de cellen uit het grid.

Leid de discretisatie van de 3 vergelijkingen af.

Hoe moeten de randvoorwaarden verwerkt worden, met name de tangentiële snelheid. Hierbij is de eis dat de randvoorwaarden met $O(h^2)$ nauwkeurigheid gediscretiseerd worden.

wi4012 en 4014 inleveren vóór 1 december 2001