

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
woensdag 25 augustus 2004, 9:00-10:30

1. (a) Twee positieve getallen x en y worden benaderd met floating point getallen $fl(x) = x(1 + \varepsilon_1)$ en $fl(y) = y(1 + \varepsilon_2)$. Het resultaat van de aftrekking $x - y$ kan geschreven worden als $fl(x) - fl(y) = (x - y)(1 + \varepsilon_3)$. Geef een bovengrens voor $|\varepsilon_3|$, als gegeven is dat $|\varepsilon_1| \leq eps$ en $|\varepsilon_2| \leq eps$.
 - (b) We rekenen met 3 cijfers en afronden. Bepaal $(635 + 0.99) - 636$ en $(635 - 636) + 0.99$. Hoe groot is de relatieve fout in beide resultaten? Verklaar het verschil.
 - (c) Als $f(x) = O(x^p)$ en $g(x) = O(x^q)$ als $x \rightarrow 0$, met $p \geq 0$ en $q \geq 0$ dan is $f(x) + 2g(x) = O(x^{\min\{p, q\}})$. Toon dit aan.
2. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} + \mathbf{g}(t), \text{ met } \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0,$$

waarbij A een 2×2 matrix is: $A = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, $a > 0$.

- (a) Toon aan dat de eigenwaarden van A gegeven worden door $\lambda_{1,2} = -a \pm i$.
- (b) Laat zien dat de Euler Voorwaarts methode toegepast op dit stelsel alleen stabiel is als $h \leq \frac{2a}{a^2 + 1}$.
- (c) De trapeziumregel voor $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ wordt gegeven door:

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}[f(t_j, w_j) + f(t_{j+1}, w_{j+1})].$$

Laat zien dat de versterkingsfactor gegeven wordt door $Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda}$.

- (d) Leidt hieruit af dat de trapeziumregel toegepast op het stelsel onvoorwaardelijk stabiel is.

Kies $a = 2$, $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $h = 0.5$.

- (e) Doe één stap met de Euler Voorwaarts methode.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html>