

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
woensdag 24 maart 2004, 9:00-10:30

1. (a) Het lineaire interpolatie polynoom p wordt gegeven door

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Bepaal hiermee een benadering voor $f'(0)$ als $f(-2h)$ en $f(-h)$ gegeven zijn.

- (b) Stel f is gegeven in de punten x , $x - h$ en $x - 2h$. Leidt een formule af voor het benaderen van $f''(x)$ van een zo hoog mogelijke graad.
- (c) Stel we rekenen met een benadering \hat{f} van f , waarbij $|\hat{f}(y) - f(y)| < \varepsilon$ voor alle $y \in [x - 2h, x]$. Hoe groot is de fout in de benadering van $f''(x)$ ten gevolge van de afrondfouten?
2. We beschouwen een beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, met $y(0) = y_0$. De RK₃ methode wordt gegeven door:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_j, w_j) , \\ k_2 = hf(t_{j+\frac{1}{2}}, w_j + \frac{1}{2}k_1) , \\ k_3 = hf(t_{j+1}, w_j + k_2) , \\ u_{j+1} = u_j + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) . \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van RK₃ gelijk is aan:

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} .$$

- (b) Geef de orde van de afbreekfout van RK₃ voor de testvergelijking.
- (c) Gegeven het beginwaardeprobleem:

$$y'' + 4y' + 3y = t, \quad y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = 0.$$

Schrijf deze vergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Is het stelsel differentiaalvergelijkingen stabiel?

- (d) Als we RK₃ toepassen op dit stelsel en we nemen $h = \frac{1}{3}$, is de RK₃ methode dan stabiel?

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html>