Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen toets wi2604: Numerieke methoden I
woensdag 6 april 2005, 9:00-10:30

1. (a) De afbreekfout is gedefinieerd door: $f'(0) - Q_1(h)$. Invullen van de formule geeft:

$$f'(0) - Q_1(h) = f'(0) - \frac{f(h) - f(0)}{h}. \tag{1}$$

Taylorontwikkeling van $f(h)$ met steunpunt 0 geeft

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi).$$

Dit invullen in (1) geeft:

$$f'(0) - Q_1(h) = -\frac{h}{2}f''(\xi).$$

(b) $Q_1(\frac{1}{8}) = \frac{0.8825-1}{\frac{1}{8}} = -0.9400$. Voor de schatting van de fout maken we gebruik van de Richardson foutschatting. Omdat we geen tabelwaarde hebben voor $h = \frac{1}{16}$ zullen we gebruik maken van $Q_1(\frac{1}{8})$ en $Q_1(\frac{1}{4})$. Merk op dat

$$f'(0) - Q_1(\frac{1}{8}) = K\frac{1}{8}$$

$$f'(0) - Q_1(\frac{1}{4}) = K\frac{1}{4}$$

Aftrekken levert op $Q_1(\frac{1}{4}) - Q_1(\frac{1}{8}) = -K\frac{1}{8}$. Dit invullen geeft: $f'(0) - Q_1(\frac{1}{8}) = Q_1(\frac{1}{8}) - Q_1(\frac{1}{4})$. Omdat $Q_1(\frac{1}{8}) = -0.9400$ en $Q_1(\frac{1}{4}) = -0.8848$ volgt de schatting $f'(0) - Q_1(\frac{1}{8}) = -0.0552$.

(c) Voor het schatten van de afrondfout merken we op dat voor de tabelwaarden geldt: $|\tilde{f}(x) - f(x)| \le 0.00005$. Voor de afrondfout in de benadering van de afgeleide geldt dan:

$$|\tilde{Q}_1(\frac{1}{8}) - Q_1(\frac{1}{8})| = |\frac{\tilde{f}(h) - f(h) + \tilde{f}(0) - f(0)}{h}| \le \frac{2 \cdot 0.00005}{\frac{1}{8}} = 0.0008$$

(d) Bepaal de Taylorontwikkeling.

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0)\,, \\ f(0+h) &= f(0) + hf^{'}(0) + \frac{h^2}{2}f^{''}(0) + O(h^3)\,, \\ f(0+2h) &= f(0) + 2hf^{'}(0) + 2h^2f^{''}(0) + O(h^3)\,. \end{aligned}$$

We verkrijgen nu de volgende voorwaarden:

$$\begin{array}{lcccccccc} f(0): & \alpha_0 & + & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0\,, \\ f^{'}(0): & & & h\alpha_1 & + & 2h\alpha_2 & = & 1\,, \\ f^{''}(0): & & & \frac{h^2}{2}\alpha_1 & + & 2h^2\alpha_2 & = & 0\,. \end{array}$$

Oplossing van dit stelsel geeft $\alpha_0 = \frac{-3}{2h}, \alpha_1 = \frac{2}{h}$ en $\alpha_2 = \frac{-1}{2h}$. De afbreekfout van de verkregen eenzijdige differentieformule

$$Q_2(h) = \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} \tag{2}$$

is $O(h^2)$. De waarde is $Q_2(\frac{1}{8}) = -0.9952$.

(e) Merk op dat bij Q_1 de afbreekfout veel groter is dan de afrondfout. Het is dus zinvol om een methode te gebruiken van een hogere orde, die tot een (veel) kleinere afbreekfout leidt. Daarom heeft de tweede methode $Q_2(h)$ de voorkeur.

2. (a) De lokale afbreekfout is gedefinieerd door

$$\tau_{i+1} = \frac{y_{i+1} - z_{i+1}}{h},$$

waarbij z_{i+1} gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} z^* &= y_i + \alpha h f(t_i, y_i) \\ z_{i+1} &= y_i + h f(t_i + \alpha h, z^*). \end{aligned}$$

Invullen van z^* geeft:

$$z_{i+1} = y_i + h f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(t_i, y_i)).$$

Voor de laatste term maken we gebruik van de Taylorontwikkeling in beide variabelen:

$$f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + \alpha h (\frac{\partial f}{\partial t})_i + \alpha h f(t_i, y_i)(\frac{\partial f}{\partial y})_i + O(h^2).$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + \alpha h [\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}]_i + O(h^2).$$

Omdat $y'(t) = f(t, y)$ en $y''(t) = [\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}](t, y)$ volgt:

$$f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(t_i, y_i)) = y_i' + \alpha h y_i'' + O(h^2).$$

De Taylorontwikkeling van y_{i+1} is:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + O(h^3).$$

Dit invullen in de definitie van de afbreekfout geeft:

$$\tau_{i+1} = (\frac{1}{2} - \alpha) h y_i'' + O(h^2).$$

Hieruit volgt het gestelde in de opgave.

(b) De versterkings factor is: $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \alpha(h\lambda)^2$

(c) Als $\lambda = i\omega$ dan moet gelden $|Q(hi\omega)| \leq 1$. Uitschrijven geeft:

$$(1-2\alpha)(h\omega)^2 + \alpha^2(h\omega)^4 \leq 0$$

Hier kan alleen aan voldaan zijn als $\alpha > \frac{1}{2}$. De bovengrens voor de stapgrootte is in dit geval:

$$h^2 \leq \frac{1}{\omega^2}\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}$$

De maximale waarde als functie van α kunnen we bepalen door de afgeleide te nemen van$\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}$, die gelijk is aan: $\frac{-2\alpha(\alpha-1)}{\alpha^4}$. Hieruit volgt, dat het maximum aangenomen wordt in $\alpha = 1$.