

**Technische Universiteit Delft**  
**Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica**

**Toets wi2604: Numerieke methoden I**  
**maandag 29 augustus 2005, 9:00-10:30**

1. We beschouwen tweede orde Lagrange interpolatie:  $f(x) = p(x) + r(x)f'''(\xi)$ . De formule voor  $p$  is hieronder gedeeltelijk gegeven:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \text{ met } L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

- (a) Laat zien dat  $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$  voor alle  $x$ .  
(b) Geef de formules voor  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$  en  $r(x)$ .  
(c) Vanaf nu veronderstellen we dat  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ . Door afrondfouten rekenen we met  $\hat{f}$  in plaats van met  $f$ , waarbij  $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$  voor alle  $x$ . Toon aan dat  $|\hat{p}(x) - p(x)| < 1.25\epsilon$  als  $\hat{p} = L_0(x)\hat{f}(x_0) + L_1(x)\hat{f}(x_1) + L_2(x)\hat{f}(x_2)$  (hint: schrijf  $x = x_0 + \alpha h$ ).  
(d) We hebben de volgende tabel:

$x$	0	0.5	1
$\sin(x)$	0	0.4794	0.8415

Geef een schatting van de afbreekfout en de afrondfout in de benadering  $\hat{p}(0.75)$  van  $\sin(0.75)$ . Is het zinvol om de getallen in de tabel met meer cijfers te bepalen (+motivatie)?

2. Gegeven is een predictor-corrector methode voor de differentiaalvergelijking:

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

door

$$\begin{aligned} u^* &= u_i + \beta h f(t_i, u_i) \\ u_{i+1} &= u^* + (1 - \beta) h f(t_i + \beta h, u^*), \quad \beta \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Laat zien dat de lokale afbreekfout van deze methode  $O(h)$  is voor elke waarde van  $\beta$ .  
(b) Bepaal de versterkingsfactor van deze methode.  
(c) Beschouw de niet-lineaire differentiaalvergelijking:

$$y' = -3y + \cos(y) + \sin(t).$$

Is de methode (met  $\beta = \frac{1}{2}$  en  $h = 1$ ) stabiel in de buurt van  $y = \frac{\pi}{2}$  en  $t = 1$ ?

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:  
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html>