TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)**
**donderdag 15 augustus 2013, 18:30-21:30**

1. We beschouwen de volgende methode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n) \\ \\ w_{n+1} = w_n + h\left(a_1 f(t_n, w_n) + a_2 f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right) \end{cases} \tag{1}$$

   a Toon aan dat de locale afbreekfout van de bovenstaande methode van de orde $O(h)$ is als $a_1 + a_2 = 1$. Voor welke waarde van $a_1$ en $a_2$ is de locale afbreekfout van de orde $O(h^2)$? (3 pt.)

   b Laat zien dat de versterkingsfactor voor algemene $a_1$ en $a_2$ gegeven wordt door

$$Q(h\lambda) = 1 + (a_1 + a_2)h\lambda + a_2(h\lambda)^2. \tag{2}$$

   (2 pt.)

   c Beschouw een reeelwaardige $\lambda < 0$ en $(a_1 + a_2)^2 - 8a_2 < 0$, leid de stabiliteitsvoorwaarde af waar $h$ aan moet voldoen. (2 pt.)

   d Beschouw het volgende stelsel

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 y_2, \\ y_2' = y_1 y_2 - y_2, \end{cases} \tag{3}$$

   Laat zien dat de Jacobiaan van het rechterlid (die gebruikt wordt voor linearisatie van het stelsel) voor beginvoorwaarde $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 2$ gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (1.5 pt.)

   e Beschouw nu de numerieke methode in vergelijking (1) voor het geval dat $a_1 = a_2 = 1/2$ toegepast op stelsel (3). Is de methode stabiel rond de beginvoorwaarde $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 2$ en stapgrootte $h = 1$ (+ motivatie)? (1.5 pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen de convectie–diffusie vergelijking met Dirichlet randvoorwaarden:

$$(P_1) \begin{cases} -u'' + u' = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 1, \end{cases} \tag{4}$$

waarin $u = u(x)$ en $u' = \frac{du}{dx}$.

a Laat zien dat

$$u(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}, \tag{5}$$

de exacte oplossing is van randwaardeprobleem ($\mathrm{P}_1$). (1.5 pt.)

b We lossen randwaardeprobleem ($\mathrm{P}_1$) op met eindige differenties, waarin $x_j = jh$, $(n+1)h = 1$, met $h$ als uniforme stapgrootte. Geef een discretisatiemethode (+bewijs) waarvoor de afbreekfout van orde $O(h^2)$ is. Behandel ook de randvoorwaarden. (3 pt.)

c Leg uit waarom niet–monotone (oscillerende) numerieke oplossingen voor ($\mathrm{P}_1$) als onbetrouwbaar gezien moeten worden. (1.5 pt.)

d We integreren de functie $f$ numeriek. Van $f$ kennen we slechts de waarden (gegeven in Tabel 1) in discrete punten.

Tabel 1: Waarden van de functie $f(x)$ op discrete punten.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.1 | 0.01 |
| 0.2 | 0.04 |
| 0.3 | 0.09 |

De Trapeziumregel over een interval $[a, b]$ wordt gegeven door

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right). \tag{6}$$

i Laat de afgeleiden van $f$ ten minste tot en met tweede orde continu zijn op $(a, b)$. Leid de locale afbreekfout af voor de Trapeziumregel. *Hint: U kunt de locale afbreekfout voor lineaire interpolatie gebruiken.* (2 pt.)

ii Leid de herhaalde Trapeziumregel af en pas deze regel toe om $\int_0^{0.3} f(x)dx$ te schatten. (2 pt.)