TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 30 januari 2014, 18:30-21:30

1. In deze opgave maken we gebruik van de Trapeziumregel om de oplossing van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$ met $y(t_0) = y_0$ te benaderen. Deze methode wordt gegeven door:
$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})\right) \tag{1}$$

   (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van de Trapeziumregel gegeven wordt door
$$Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}.$$
(2 pt.)

   (b) Geef de orde (+ bewijs) van de lokale afbreekfout van de Trapeziumregel voor de testvergelijking. *Hint:* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,\qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$ (3 pt.)

   (c) Toon aan dat voor een algemene complexe $\lambda = \mu + i\nu$ de methode stabiel is voor elke stapgroote $h > 0$ als $\mu \leq 0$. (2 pt.)

   (d) Doe één stap met de Trapeziumregel voor het volgende beginwaardeprobleem
$$y' = -(1 + 2t)y + t, \text{ met } y(0) = 1,$$
en stapgrootte $h = \frac{1}{2}$. (1.5 pt.)

   (e) Maak voor dit probleem (gegeven in onderdeel d) een vergelijking van de Trapeziumregel en de Euler Voorwaarts methode. Aan welke methode geeft u de voorkeur (+ motivatie)? (1.5 pt.)

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y^2 = x^2 + 1, \quad x \in (0,1), \\ \\ y(0) = 0, \qquad y(1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

a Laat zien dat $y(x) = x$ een oplossing is van het bovenstaande randwaardeprobleem. (1pt.)

Het randwaardeprobleem is niet lineair, en daarom beschouwen een vastepunts methode en de methode van Newton–Raphson.

b Laat $y^{(k)}$ de benadering zijn van het randwaardeprobleem na k iteraties met de volgende vastepunts methode:

$$\text{Itereer:} \begin{cases} -\dfrac{d^2y^{(k+1)}}{dx^2} + \dfrac{dy^{(k+1)}}{dx} + y^{(k+1)}y^{(k)} = x^2 + 1, \quad x \in (0,1), \\ y^{(k+1)}(0) = 0, \qquad y^{(k+1)}(1) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Leid een discretisatie af voor het bovenstaande randwaardeprobleem om $y^{(k+1)}$ te bepalen met n onbekenden en een stapgrootte $h = \frac{1}{n+1}$. Dus, bepaal een discretisatie, zodat $y^{(k+1)}(x_1), ..., y^{(k+1)}(x_n)$ berekend kunnen worden. Neem aan dat $y^{(k)}$ bekend is. Bewijs dat de fout van orde $\mathcal{O}(h^2)$ is (het is voldoende om de locale afbreekfout te beschouwen). (3pt.)

c Laat de beginschatting $y^{(0)}$ gegeven zijn door $y^{(0)}(x) = 0, x \in [0,1]$, gebruik $h = \frac{1}{3}$. Bereken de numerieke oplossing van de eerste vastepunts iteratie. (2pt.)

Vervolgens leiden we de Newton–Raphson methode af en gebruiken we deze om een niet lineair probleem op te lossen.

d Gegeven het scalaire niet lineaire probleem:

$$\text{Bepaal } y \in \mathbb{R} \text{ zodat } f(y) = 0. \tag{4}$$

Leid de formule van Newton–Raphson,

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{f(y^{(k)})}{f'(y^{(k)})}, \tag{5}$$

af om het probleem op te lossen. (2pt.)

e Voer één Newton–Raphson stap uit op het volgende stelsel voor w_1 en w_2:

$$\begin{cases} 18w_1 - 9w_2 + w_1^2 = 0, \\ -9w_1 + 18w_2 + w_2^2 = 9. \end{cases} \tag{6}$$

Gebruik $w_1 = w_2 = 0$ als de beginschatting. (2pt.)