TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 6 juli 2017, 18:30-21:30

1. We beschouwen de numerieke integratie van het volgende **beginwaardeprobleem**

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

We gebruiken de *voorwaartse methode van Euler* om de numerieke oplossing van dit beginwaardeprobleem (1) te bepalen. Deze methode is gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n), \tag{2}$$

waarin Δt de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Bepaal de orde van de locale afbreekfout. (2 pt.)

(b) Geef de versterkingsfactor voor deze methode. Voor welke Δt is de methode stabiel als λ een negatief reëel getal is? (2 pt.)

(c) We beschouwen het beginwaarde probleem:

$$y'' = -y' - \frac{1}{2}y, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

Schrijf deze tweede orde differentiaalvergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Toon aan dat de eigenwaarden van $\mathbf{A}$ gegeven worden door

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ en } \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(2 pt.)

(d) Doe 1 stap met de voorwaartse methode van Euler toegepast op het stelsel met $\Delta t = 1$. (2 pt.)

(e) Onderzoek de stabiliteit van de voorwaartse methode van Euler voor dit stelsel voor een algemene $\Delta t > 0$. (2 pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen het volgende **iteratieproces** $x_{n+1} = g(x_n)$, met

$$g(x_n) = x_n + h(x_n)(x_n^3 - 27),$$

waarbij h een continue functie is met $h(x) \neq 0$ voor elke $x \neq 0$.

(a) Als dit proces convergeert, naar welke limiet p convergeert het dan? (1 pt.)

(b) Beschouw drie mogelijke keuzen voor $h(x)$:

(i) $h_1(x) = -\frac{1}{x^4}$

(ii) $h_2(x) = -\frac{1}{x^2}$

(iii) $h_3(x) = -\frac{1}{3x^2}$

Voor welke keuze kan het proces niet convergeren? Voor welke keuze convergeert het proces het snelst? Motiveer uw antwoord. (2 pt.)

(c) Bepaal een functie $h_4(x)$ zodat de 'convergentiefaktor' één is. (1 pt.)

(d) Laat p een nulpunt van een gegeven functie f zijn. $\hat{f}$ is de functie verstoord door meetfouten. Er is gegeven dat $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon_{max}$ voor alle x. Laat zien dat voor het nulpunt $\hat{p}$ van $\hat{f}$ geldt $|\hat{p} - p| \leq \frac{\epsilon_{max}}{|f'(p)|}$. (1 pt.)

3. We beschouwen we het volgende **randwaardeprobleem**

$$\begin{cases} -y''(x) + (x+1)y(x) = x^3 + x^2 - 2, & 0 < x < 1, \\ \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \end{cases} \tag{3}$$

met $y' = \frac{dy}{dx}$ en $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

(a) We willen het randwaardeprobleem (3) met behulp van de eindige differentie methode oplossen. Laat $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$ waarin de stapgrootte Δx constant is. Geef een discretisatie (+ bewijs) met

- locale afbreekfout van $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$;
- verwerking van de randvoorwaarden;
- en een symmetrische discretisatie matrix.

Gebruik een virtueel gridpunt voor de randvoorwaarde op $x = 0$. (2.5 pt.)

(b) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen $\mathbf{Aw} = \mathbf{f}$ voor de discretisatie uit deel (a) af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel moet 3×3 zijn (drie onbekenden en drie vergelijkingen).

Opmerking: U hoeft het stelsel **niet** op te lossen. (1 pt.)

(c) Omdat de 3×3 discretisatie matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch is, zijn alle eigenwaarden reëel. Maak gebruik van de Gershgorin-cirkel stelling om een schatting voor de kleinste eigenwaarde $|\lambda|_{\min}$ te berekenen. Concludeer hieruit dat het eindige differentie schema uit (a) stabiel is. Dat betekent dat $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat en dat er een constante C bestaat zó dat $\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq C$ als $\Delta x \to 0$. (1.5 pt.)