TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: D. den Ouden-van der Horst
Reviewer tentamen: C. Vuik

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(WI3097TU WI3097Minor WI3197Minor AESB2210 AESB2210-18 CTB2400)
Donderdag 31 januari 2019, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 12 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. We beschouwen de volgende methode

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}\Delta t \left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})\right) \tag{1}$$

voor de integratie van het **beginwaardeprobleem** $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

(a) Laat zien dat de *versterkingsfactor* wordt gegeven door

$$Q(\lambda\Delta t) = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t}.$$

($1\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van (1) voor de testvergelijking $y' = \lambda y$ van de vorm

$$\tau_{n+1} = T\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

is en *geef* een formule voor T. ($3\frac{1}{2}$ pt.)
Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.
Hint: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

(c) We beschouwen het volgende *stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen*:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' &=& -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 9, \\ x_2' &=& -2x_2 - 2x_3 + 4, \\ x_3' &=& 2x_2 - 2x_3 + 8, \\ x_1(0) &=& 1, x_2(0) = -1, x_3(0) = 3. \end{array}\right. \tag{2}$$

Schrijf het dit stelsel als $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ en *laat zien* dat de toepassing van (1) op (2) stabiel is voor $\Delta t = 1$. ($3\frac{1}{2}$ pt.)

(d) De benadering $\mathbf{w}_1$ van de oplossingen van stelsel (2) op tijd $t = 1$ bepaald door bovenstaande methode toe te passen op (2) met $\Delta t = 1$ is door ons berekend als

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Laat zien dat de gegeven waarde voor $\mathbf{w}_1$ correct is. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y''(x) + xy(x) & = & \sin(2\pi x), \quad x \in (0,1), \\ y(0) & = & 0, \\ y(1) & = & 1. \end{array}\right. \tag{3}$$

In deze opdracht benaderen we de exacte oplossing met een numerieke methode.

(a) *Laat zien* dat

$$Q(\Delta x) = \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{\Delta x^2}, \tag{4}$$

een $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ benadering is van $y''(x)$. (1 pt.)

(b) We lossen het randwaardeprobleem (3) op met behulp van de eindige differentie (4), na het kiezen voor $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$, met Δx als uniforme stapgrootte. We krijgen dan de volgende formules:

$$\begin{array}{rcll} -\dfrac{w_2 - 2w_1}{(\Delta x)^2} + \Delta x w_1 & = & \sin(2\pi\Delta x), & \\ -\dfrac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{(\Delta x)^2} + j\Delta x w_j & = & \sin(2\pi j\Delta x), & \text{voor } j \in \{2, \dots, n-1\}, \\ -\dfrac{-2w_n + w_{n-1}}{(\Delta x)^2} + n\Delta x w_n & = & \sin(2\pi n\Delta x) + \dfrac{1}{\Delta x^2}. & \end{array}$$

Geef een *afleiding* (met argumenten) van dit stencil. (2 pt.)

(c) De cirkelstelling van Gershgorin stelt:

De eigenwaarden van een algemene $n \times n$ matrix A liggen in het complexe vlak in de vereniging van cirkels

$$|z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \textit{met} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Gebruik deze stelling om te *laten zien* dat elke eigenwaarde λ van het gegeven stencil (in de vorm $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$) voldoet aan

$$\Delta x \leq \lambda \leq \frac{4}{(\Delta x)^2} + n\Delta x.$$

(2 pt.)

3. We hebben een functie f die voldoet aan $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$ en $f(1) = 1$ benaderd met een natuurlijke kubische spline s gegeven door

$$s(x) = \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{3}{4}x^3 - \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 2 & \text{als} \quad x \in [-1, 0), \\[2ex] \dfrac{3}{4}x^3 - \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 2 & \text{als} \quad x \in [0, 1]. \end{array}\right. \tag{5}$$

In de volgende opdrachten ga je bewijzen dat s inderdaad de natuurlijke kubische spline is gebaseerd op f is. Daarna ga je s gebruiken om $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ te benaderen.

(a) *Laat zien* dat s een stuksgewijze functie is bestaand uit polynomen van graad 3 of lager. ($\frac{1}{2}$ pt.)

(b) *Laat zien* dat $s(x)$ gelijk is aan $f(x)$ in de knooppunten. (1 pt.)

(c) *Laat zien* dat s, s' en s'' continu zijn op het interval $[-1, 1]$. (2 pt.)

(d) *Laat zien* dat $s''(x)$ gelijk is aan nul in de eindpunten. ($\frac{1}{2}$ pt.)

(e) *Benader* $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ met behulp van (5). (1 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html