TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: D. den Ouden-van der Horst
Reviewer tentamen: C. Vuik

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(WI3097TU WI3097Minor WI3197Minor AESB2210 AESB2210-18 CTB2400)
Dinsdag 16 april 2019, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 12 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. We beschouwen de volgende tijdsintegratiemethod

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}\Delta t \left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_n + \Delta t f(t_n, w_n)) \right) \tag{1}$$

voor de integratie van het **beginwaardeprobleem** $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

(a) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van (1) toegepast op $y' = g(y)$ van de vorm

$$\tau_{n+1} = P\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

is en *geef* een formule voor P. (4 pt.)
Hint: $y'' = g'(y)y'$.
Opmerking: Gebruik van de testvergelijking in vraag (a) resulteert in nul punten voor vraag (a).

(b) Laat zien dat de *versterkingsfactor* wordt gegeven door

$$Q(\lambda\Delta t) = 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2.$$

(1 pt.)

(c) We beschouwen het volgende *stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen*:

$$\begin{cases} x_1' &= -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 1, \\ x_2' &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 1, \\ x_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

Schrijf dit stelsel als $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ en *leid* de meest strikte bovengrens $\Delta t_{\max}$ voor Δt *af* zodanig dat de toepassing van (1) op (2) stabiel is voor $\Delta t \leq \Delta t_{\max}$. (4 pt.)
Hint: De eigenwaardes van A zijn reële getallen.
Opmerking: Verkeerde eigenwaardes leiden tot de aftrek van 1 punt in vraag (c).

(d) *Voer* één tijdstap door (1) toe te passen op (2) met $\Delta t = 1$. (1 pt.)
Opmerking: Gebruik van een verkeerde methode of het oplossen van een ander stelsel resulteert in nul punten voor vraag (d).

voor vervolg z.o.z.

2. We beschouwen het volgende convectie-diffusie-randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -y''(x) - 3y'(x) &= 1, \quad x \in (0,1], \\ y'(0) &= 0, \\ y(1) &= 1. \end{cases} \tag{3}$$

In deze opdracht benaderen we de exacte oplossing met een numerieke methode.

(a) De afgeleide $y'(x)$ zal benaderd worden met een upwind discretisatie $U(\Delta x)$, waar twee kandidaten beschikbaar voor zijn:

$$U(\Delta x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}, \tag{4}$$

of

$$U(\Delta x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \tag{5}$$

Beargumenteer welke kandidaat gebruikt moet worden en *bepaal* de orde van deze benadering. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(b) *Leid* een $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ benadering $Q(\Delta x)$ *af* voor $y''(x)$ die van de vorm

$$Q(\Delta x) = \frac{\alpha_1 y(x + \Delta x) + \alpha_0 y(x) + \alpha_{-1} y(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

is. (2 pt.)

(c) We lossen het randwaardeprobleem (3) op met behulp van de eindige differenties $Q(\Delta x)$ en $U(\Delta x)$, na het kiezen voor $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$, met Δx als uniforme stapgrootte.

Leid het resulterende schema *af*, inclusief argumentatie, voor een willekeurig intern punt x_j en voor all randpunten. ($2\frac{1}{2}$ pt.)

Opmerking: Jouw keuze voor $U(\Delta x)$ in vraag (a) en voor $Q(\Delta x)$ in vraag (b) beïnvloeden de punten voor vraag (c) niet, mits correct toegepast.

3. We willen een benadering voor $\sqrt{3}$ vinden. Daarom beschouwen we het vaste-puntprobleem

$$x = g(x),$$

op het interval $[1,2]$, met de functie g gedefinieerd als

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 1. \tag{6}$$

In de volgende opdrachten zal je bewijzen dat $p = \sqrt{3}$ inderdaad het unieke vaste punt is van g op het interval $[1,2]$ en dat voor elk startpunt $p_0 \in [1,2]$ de vaste-puntiteratie

$$p_{n+1} = g(p_n), \tag{7}$$

convergeert naar $p = \sqrt{3}$, en je voert deze vaste-puntiteratie uit.

(a) *Laat zien* dat $p = \sqrt{3}$ een vast punt van de functie g is. ($\frac{1}{2}$ pt.)

(b) *Bargumenteer* waarom g continu is op $[1,2]$. ($\frac{1}{2}$ pt.)

(c) *Laat zien* dat $1 \le g(x) \le 2$ voor alle $x \in [1,2]$. (1 pt.)

(d) *Vind* de kleinste waarde k zodanig dat $|g'(x)| \le k < 1$ voor alle $x \in [1,2]$. (1 pt.)

(e) *Benader* $p = \sqrt{3}$ door p_1 en p_2 te berekenen met 4 significante cijfers, gegeven dat $p_0 = 2{,}000$. (1 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html