TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(CTB2400)
Donderdag 23 juni 2022, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 12 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Voor het beginwaardeprobleem $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, gebruiken we de integratiemethode

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{\Delta t}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right), \end{cases} \tag{1}$$

waarin Δt de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van deze integratiemethode van de orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. (U mag hier niet de testvergelijking gebruiken.) (3pt.)

Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = \cos \pi t, \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Laat zien dat bovenstaand beginwaardeprobleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \pi t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (1pt.)

(c) Bereken één stap met de methode gegeven in (1), waarbij $\Delta t = 0.5$ en $t_0 = 0$ toegepast op (3) met de gegeven beginvoorwaarden. (2pt.)

(d) Laat zien dat de versterkingsfactor voor deze integratiemethode gegeven wordt door $Q(\lambda \Delta t) = 1 + \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2}$. (2pt.)

(e) Onderzoek voor welke Δt integratiemethode (1) toegepast op het beginwaardeprobleem (3) stabiel is. (2pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. Van een fiets wordt de snelheid geschat. De gemeten afstanden van de fiets vanaf de startlijn staan in de onderstaande tabel.

t (s)	0	10	20
$d(t)$ (m)	0	40	100

(a) Geef de 1^e orde achterwaartse differentieformule voor $d'(2h)$ en bepaal hiermee een schatting van de snelheid op $t = 20$. (1 pt.)

(b) We zoeken een differentieformule voor de eerste afgeleide van d in $t = 2h$ van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h}d(0) + \frac{\alpha_1}{h}d(h) + \frac{\alpha_2}{h}d(2h), \text{ zodat } Q(h) - d'(2h) = O(h^2).$$

Laat zien dat de coefficienten α_0, α_1 en α_2 moeten voldoen aan het stelsel:

$$\begin{array}{rcccccl} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\,, \\ -2\alpha_0 & - & \alpha_1 & & & = & 1\,, \\ 2\alpha_0 h & + & \frac{1}{2}\alpha_1 h & & & = & 0\,. \end{array}$$

(2 pt.)

(c) De oplossing van dit stelsel is $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Laat zien dat de afbreekfout gegeven wordt door $Q(h) - d'(2h) = O(h^2)$. (1 pt.)

(d) Gebruik $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ en geef een schatting van $d'(20)$. (1 pt.)

3. (a) Gegeven is het *scalaire* niet lineaire probleem:

$$\text{Bepaal } p \in \mathbb{R} \text{ zodat } f(p) = 0. \tag{4}$$

Leid de formule van Newton-Raphson af (mag ook grafisch):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \text{ voor } n \geq 1 \tag{5}$$

(2 pt.)

(b) Leid Newton-Raphson's methode voor het volgende *algemene* niet lineaire problem af:

$$\text{Bepaal } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m \text{ zodat } \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

(1 pt.)

(c) Voer **één** Newton-Raphson stap uit op het volgende niet lineaire problem voor w_1 en w_2:

$$\begin{cases} 18w_1 - 9w_2 + w_1^2 = 0, \\ -9w_1 + 18w_2 + w_2^2 = 9. \end{cases} \tag{7}$$

Gebruik $w_1 = w_2 = 0$ als de beginschatting. (2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://homepage.tudelft.nl/d2b4e/wi3097/tentamen.html