TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(CTB2400)
Donderdag 29 juni 2023, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 14 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. a De vierde orde Runge-Kutta methode (RK_4) voor de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ wordt gegeven door de volgende formules:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(t_n, w_n) \\ k_2 &= \Delta t f(t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t, w_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= \Delta t f(t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t, w_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, w_n + k_3) \end{aligned}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Bepaal de versterkingsfactor $Q(\lambda\Delta t)$ van RK_4. (2pt.)

b Gebruik het feit dat $y(t_{n+1}) = e^{\lambda\Delta t}y(t_n)$ geldt voor de exacte oplossing van $y' = \lambda y$ om te laten zien dat RK_4 toegepast op de homogene testvergelijking een lokale afbreekfout heeft van $\mathcal{O}(\Delta t^4)$. (Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots.$) (2pt.)

In de volgende onderdelen mag je aannemen dat dit resultaat ook geldt voor stelsels, zodat de globale fout van RK_4 toegepast op vergelijking (1) gelijk is aan $\mathcal{O}(\Delta t^4)$.

We beschouwen het volgende tweede-orde beginwaardeprobleem:

$$y'' + py' + qy = \sin t, \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = y_0'. \tag{1}$$

c Schrijf vergelijking (1) als een stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen van het type $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$. Geef $\mathbf{A}$ en $\mathbf{g}$ en laat zien dat de eigenwaarden van $\mathbf{A}$ gegeven worden door: $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$. (2pt.)

d We nemen nu p=1000 en q=249999. Geef een benadering van de stabiliteitsvoorwaarde voor dit geval. Hint: gebruik dat RK_4 stabiel is als $\Delta t \leq \frac{2.8}{-\lambda}$ als $\lambda < 0$. (2pt.)

e Stel dat je een keuze moet maken tussen de Trapeziumregel en RK_4 om het probleem gegeven in (d) op te lossen. Motiveer je keuze zo goed mogelijk. Hierbij moeten aan de orde komen: de stabiliteitsvoorwaarde, de orde van grootte van de globale fout en de hoeveelheid werk. (2pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We hebben een functie f die voldoet aan $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$ en $f(1) = 1$ benaderd met een natuurlijke kubische spline s gegeven door

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 & \text{als} \quad x \in [-1, 0), \\ \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 & \text{als} \quad x \in [0, 1]. \end{cases} \tag{2}$$

In de volgende opdrachten ga je bewijzen dat s inderdaad de natuurlijke kubische spline is gebaseerd op f is. Daarna ga je s gebruiken om $f\left(\frac{1}{2}\right)$ te benaderen.

(a) *Laat zien* dat s een stuksgewijze functie is bestaand uit polynomen van graad 3 of lager. ($\frac{1}{2}$ pt.)

(b) *Laat zien* dat $s(x)$ gelijk is aan $f(x)$ in de knooppunten. (1 pt.)

(c) *Laat zien* dat s, s' en s'' continu zijn op het interval $[-1, 1]$. (2 pt.)

(d) *Laat zien* dat $s''(x)$ gelijk is aan nul in de eindpunten. ($\frac{1}{2}$ pt.)

(e) *Benader* $f\left(\frac{1}{2}\right)$ met behulp van vergelijking (2). (1 pt.)

3. We zijn geïnteresseerd in de numerieke integratie van de integraal

$$\int_0^{2\pi} y(x)dx,$$

met $y(x) = 1 + \cos(x)$.

(a) *Benader* de bovenstaand integraal met de *rechter samengestelde Rechthoekregel* met $h = \pi/2$. ($1^1/2$ pt.)

(b) *Benader* de bovenstaand integraal met de *samengestelde Trapeziumregel* met $h = \pi/2$. (1 pt.)

(c) De grootte van de fouten ε_R en ε_T van de benaderingen zijn begrensd door

$$\varepsilon_R \leq \pi h \max_{x\in[0,2\pi]} |y'(x)|,$$

voor de rechter samengestelde Rechthoekregel en door

$$\varepsilon_T \leq \frac{\pi}{6} h^2 \max_{x\in[0,2\pi]} |y''(x)|,$$

voor de samengestelde Trapeziumregel. *Geef* expliciete bovengrenzen voor beide regels voor algemene waarden van h. ($1^1/2$ pt.)

(d) *Selecteer en motiveer* aan welke methode jij de voorkeur geeft als h klein wordt. (1 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
https://diamhomes.ewi.tudelft.nl/~kvuik/wi3097/tentamen.html