Verbetering van de parallelle efficientie van de VMS methode door middel van deflatie

Gertjan van Zwieten

15/08/2006

Technische Universiteit Delft

Variational Multi Scale methode

- Oplossing Navier-Stokes vergelijkingen
- Per tijdstap: Newton Rhapson / GMRES

Probleem

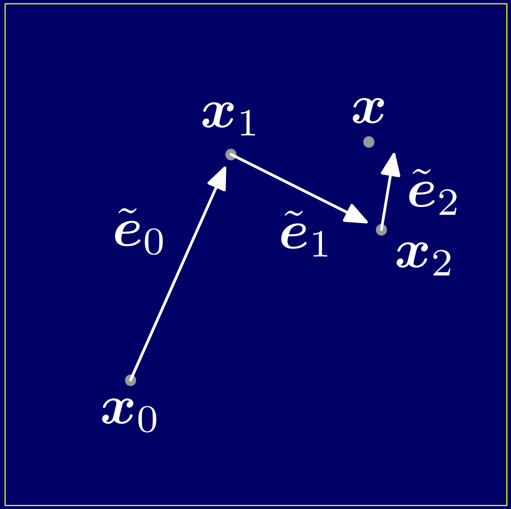
- Jacobiaan slecht geconditioneerd
- Parallellisatie hindert preconditioner
- Gevolg: trage convergentie

Oplossing

- Deflatie

Standaard Iteratieve Methode

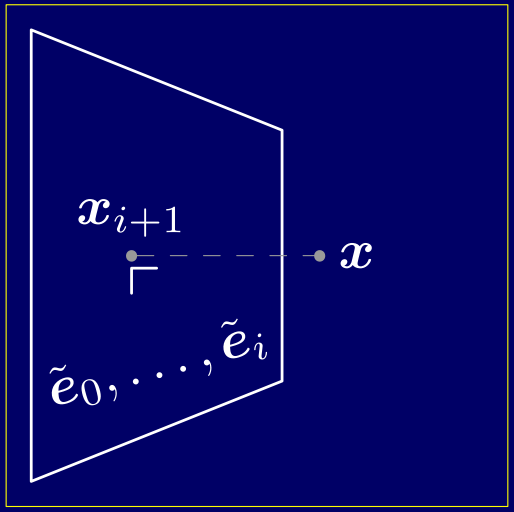
1. $\boldsymbol{x}_0 \leftarrow 0$
2. for i in $0, 1, 2, \ldots$:
3. $\quad \boldsymbol{r}_i \leftarrow \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$
4. $\quad \tilde{\boldsymbol{e}}_i \leftarrow \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{r}_i$
5. $\quad \boldsymbol{x}_{i+1} \leftarrow \boldsymbol{x}_i + \tilde{\boldsymbol{e}}_i$



- Stelsel $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- Preconditioner $\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}$ benadert inverse matrix
- Convergentie afhankelijk van kwaliteit $\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}$

Krylov Subspace Methode

1. $\boldsymbol{x}_0 \leftarrow 0$
2. for i in $0, 1, 2, \ldots$:
3. $\quad \boldsymbol{r}_i \leftarrow \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$
4. $\quad \tilde{\boldsymbol{e}}_i \leftarrow \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{r}_i$
5. $\quad \boldsymbol{x}_{i+1} \leftarrow \mathbb{P}_{\mathrm{span}\{\tilde{e}_0,\ldots,\tilde{e}_i\}}\boldsymbol{x}$



- Projectie minimaliseert afstand tot zoekruimte

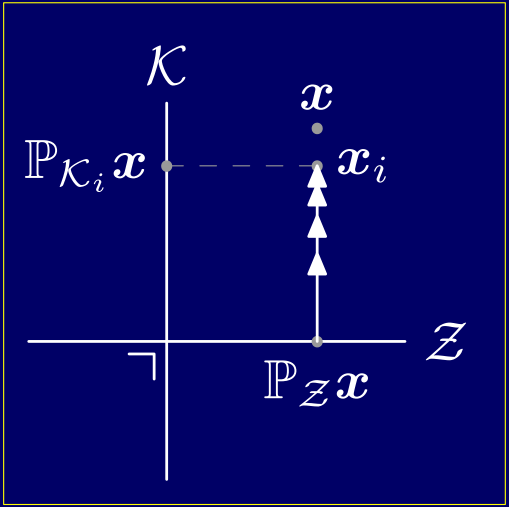
  $$\mathbb{P}_{\mathcal{V}} : \boldsymbol{v} \to \mathrm{argmin}_{v \in \mathcal{V}} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|$$

- Zoekruimte is onafhankelijk van projectienorm

  $$\mathrm{span}\{\tilde{\boldsymbol{e}}_0, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_i\} = \mathcal{K}_{i+1}(\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{A}, \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b})$$

Deflated Krylov Methode

1. $\boldsymbol{x}_0 \leftarrow \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}\boldsymbol{x}$
2. for i in $0, 1, 2, \ldots$:
3. $\quad \boldsymbol{r}_i \leftarrow \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$
4. $\quad \tilde{\boldsymbol{e}}_i \leftarrow \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{r}_i$
5. $\quad \boldsymbol{x}_{i+1} \leftarrow \mathbb{P}_{\mathcal{Z}\oplus\mathrm{span}\{\tilde{\boldsymbol{e}}_0,\ldots,\tilde{\boldsymbol{e}}_i\}}\boldsymbol{x}$



- Krylovruimte orthogonaal op deflatieruimte

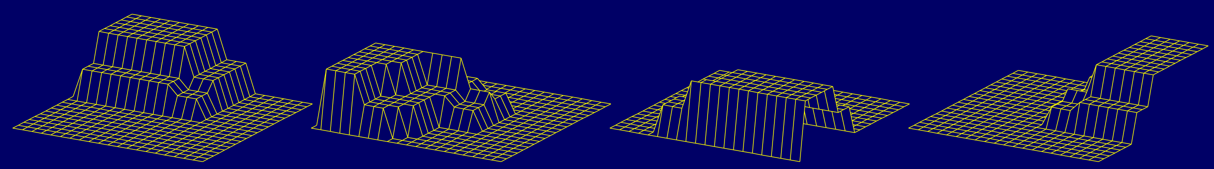
  $$\mathcal{Z} \oplus \mathrm{span}\{\tilde{\boldsymbol{e}}_0, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_i\} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{K}_{i+1}, \;\; \mathcal{Z} \perp \mathcal{K}_{i+1}$$

- Deflatiepreconditioner is singulier

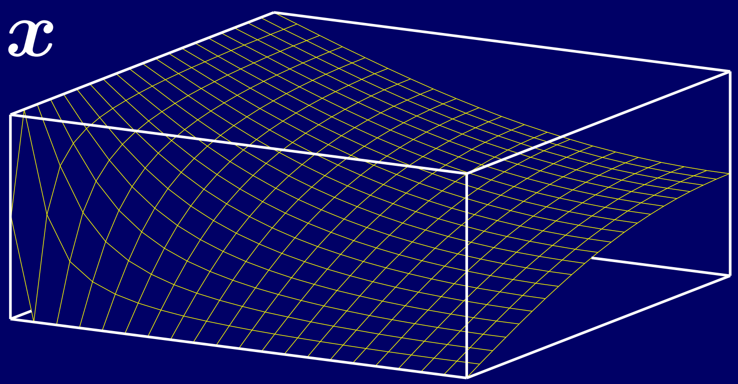
  $$\mathcal{K}_{i+1}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}), \;\; \boldsymbol{P} = (\mathbb{I} - \mathbb{P}_{\mathcal{Z}})\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}$$

Deflatieruimte: constant

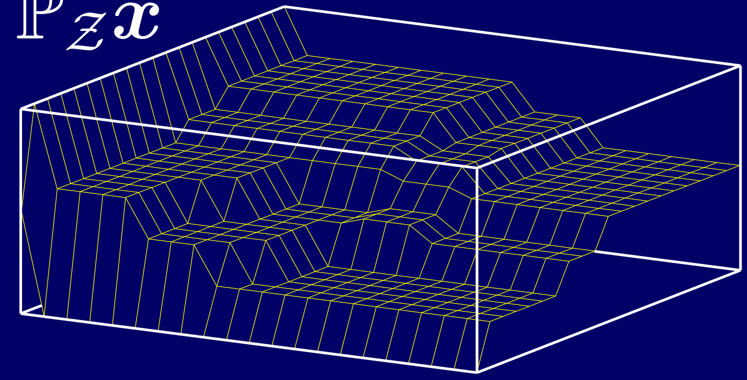
Testprobleem: $\Delta \boldsymbol{x} = 0$

$\mathcal{Z} = \text{span} \Big\{$  $\Big\}$

$\boldsymbol{x}$



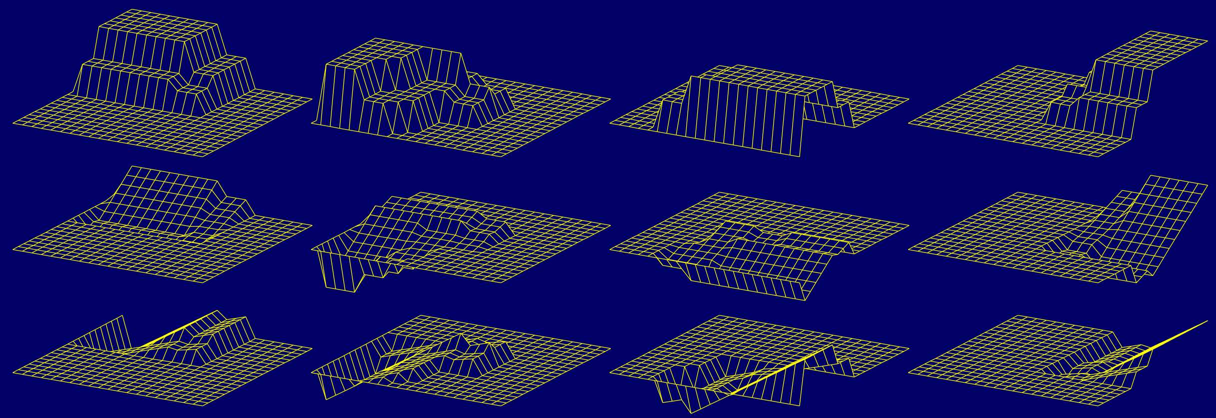
$\mathbb{P}_{\mathcal{Z}} \boldsymbol{x}$



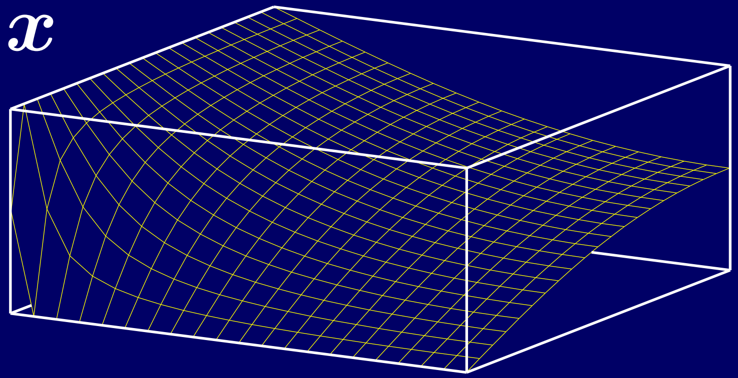
Deflatieruimte: lineair

Testprobleem: $\Delta \boldsymbol{x} = 0$

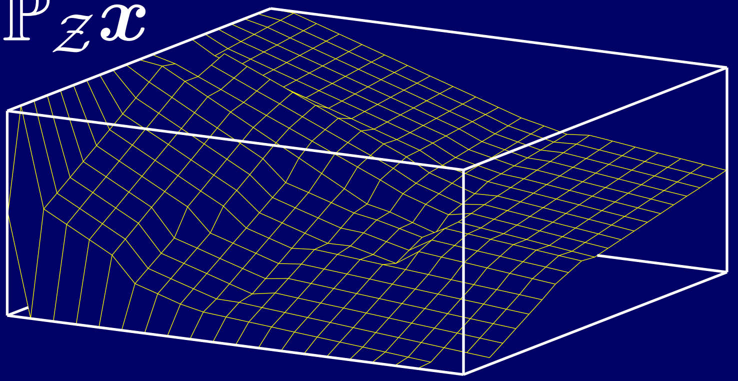
$$\mathcal{Z} = \text{span} \left\{ \quad \right\}$$



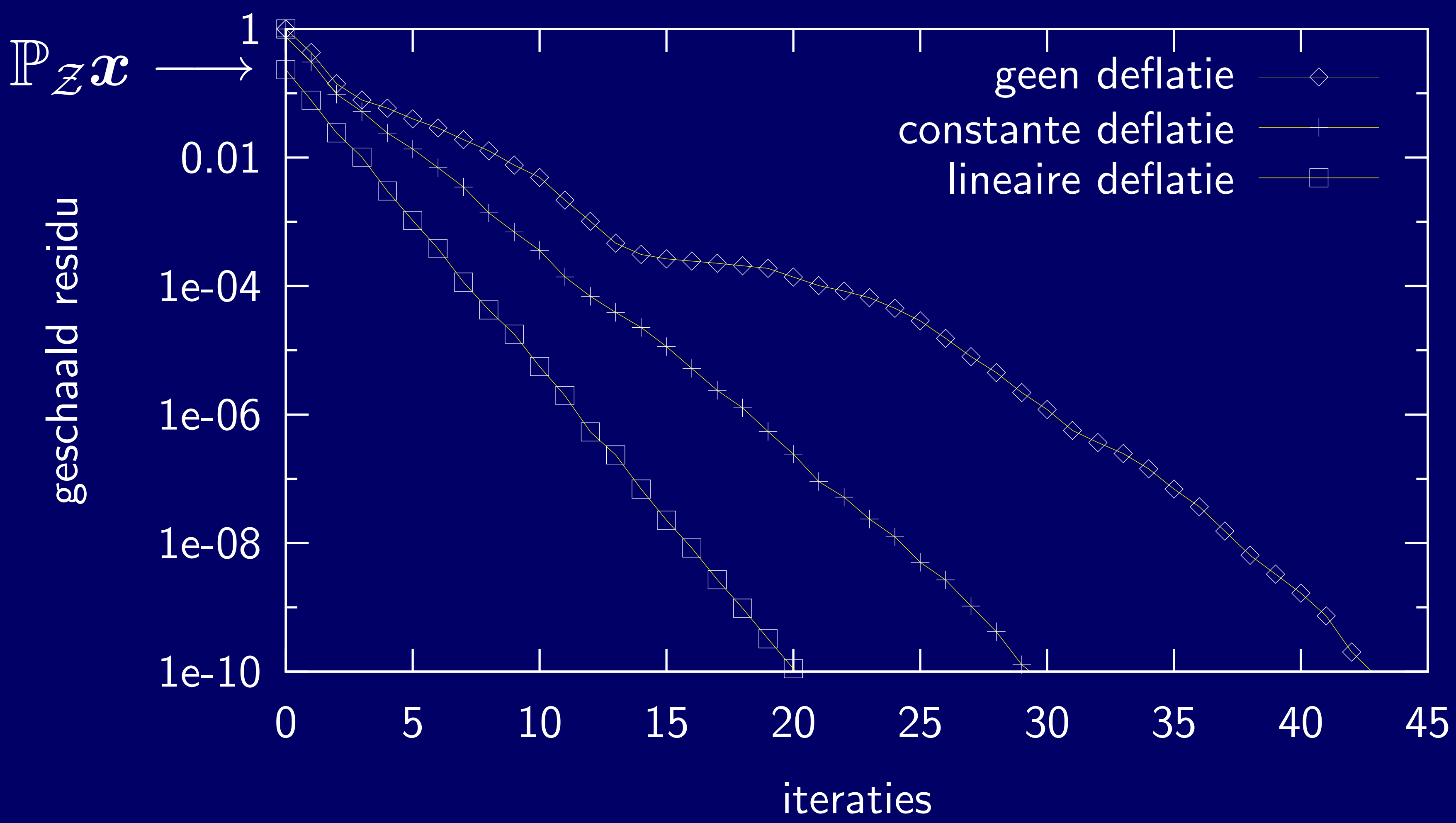
$\boldsymbol{x}$



$\mathbb{P}_{\mathcal{Z}} \boldsymbol{x}$



Convergentie testprobleem



TU Delft

Deflatie vs standaard Krylov

- Betere eerste schatting door projectie
- Snellere convergentie in orthogonale ruimte
- Meer werk per iteratie
- Lager (effectief) conditiegetal

Succes afhankelijk van

- Deflatieruimte: benadering eigenvectoren
- Projectie: benadering oplossing

Bijzonderheden VMS

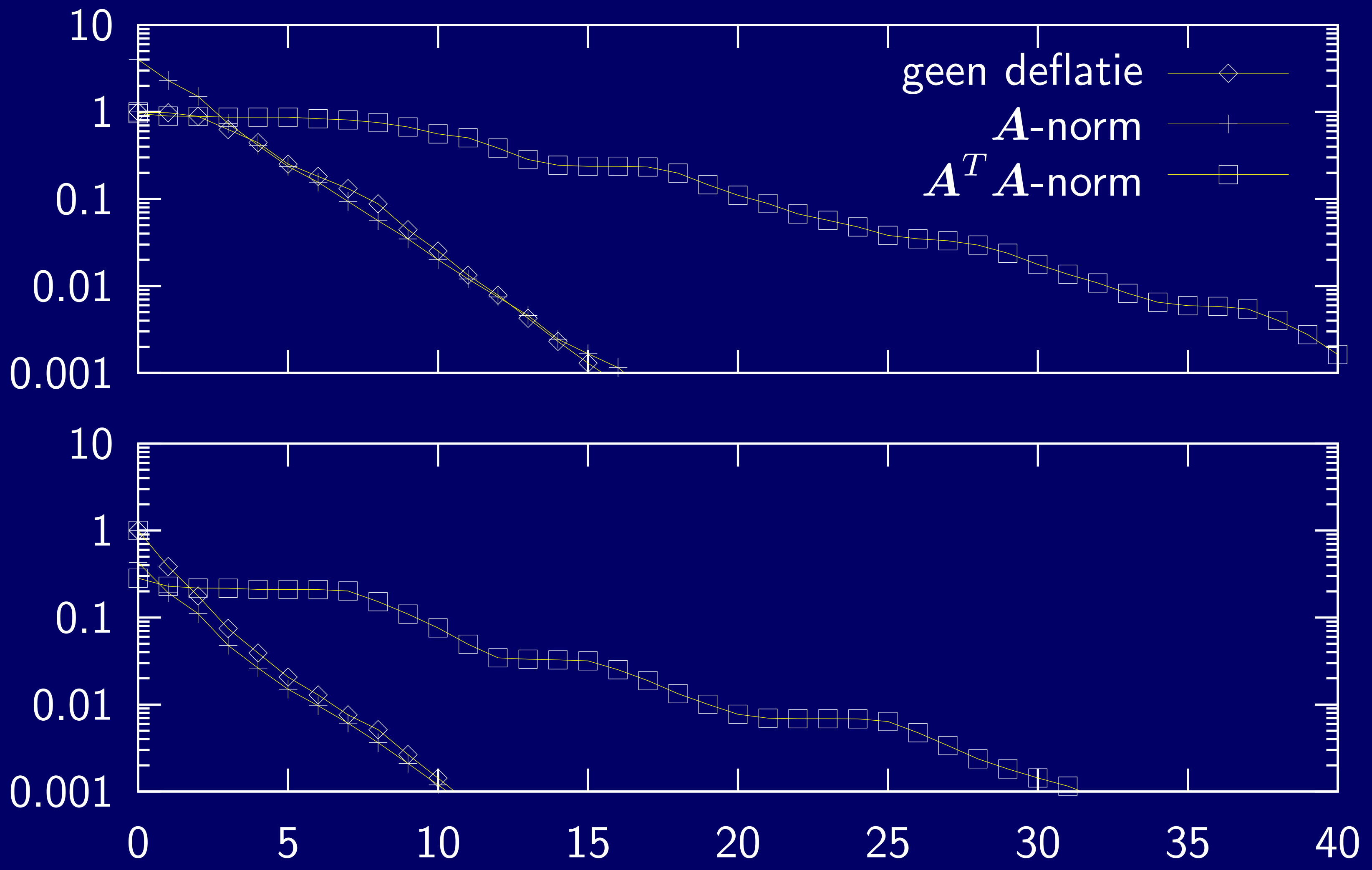
Met betrekking tot projectie

- Matrices niet symmetrisch; $\|\cdot\|_{A}$ geen norm
- Conventionele projectie verliest grond
- Idee: minimaliseer residu, $\|\cdot\|_{A^T A}$

Met betrekking tot deflatieruimte

- Ruimte 4-dimensionaal, hoge orde
- Oplossing bevat vijf grootheden, turbulent

Convergentie VMS



Conclusies

- Deflatie zeer gevoelig voor projectienorm; achteruitgang mogelijk
- Minimum residu projectie in alle gevallen van subdomeindeflatie ongeschikt
- Nader onderzoek gewenst naar augmented Krylov methoden
- Conventionele deflatieruimtes ongeschikt voor VMS
- Andere vectoren mogelijk; fysische deflatie aanpak, Ritz vectoren

Bereikt

- Deflatie solver in Jem/Jive
- Connectie deflatie en augmentatie
- Deflatie als rechter preconditioner
- Deflatieruimte op basis van shape functies
- Projectie op basis van minimum residu
- Resultaten en aanbevelingen VMS