

G. Alberts

Interfacultaire werkgroep Wetenschap en Samenleving

Katholieke Universiteit Nijmegen

Centrum voor Wiskunde en Informatica,

Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

g.alberts@cw.nl

Een eeuw wiskunde en werkelijkheid

De opkomst van het wiskundig modelleren

De manier van bruikbaar maken van wiskunde is tussen het begin en het eind van de twintigste eeuw radicaal veranderd. Meer nog dan de wiskunde op zichzelf, veranderde de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid. Dat wil zeggen, wiskundigen keken anders tegen deze relatie aan en ze gingen in de loop van de eeuw anders om met toepassen. In het bijzonder vestigde zich de praktijk van wiskundig modelleren.

In een reeks van vier artikelen zullen de veranderingen in de twintigste eeuw in het toepassen van wiskunde, en meer in het algemeen van de verhouding wiskunde–werkelijkheid, de revue passeren. Hieronder volgt een algemeen overzicht van de opkomst van het wiskundig modelleren. In de volgende bijdragen wordt dit voor twee deelgebieden nader uitgewerkt en in het vierde artikel staat de wiskunde zelf centraal.

Het thema van deze reeks artikelen is de relatie tussen wiskundig denken en werkelijkheid. Volgens Mannoury zijn er twee nooit geheel opgeloste filosofische vraagstukken rond de wiskunde, haar schoonheid en haar toepasbaarheid. Het tweede vraagstuk nemen we hier als onderwerp van historisch overzicht. Wat zijn de lotgevallen van de toepasbaarheid van de wiskunde in de twintigste eeuw? We zijn er dus niet op uit het vraagstuk van de toepasbaarheid filosofisch te kraken, maar te signaleren hoe er in de loop van de tijd over gedacht werd en hoe het bruikbaar maken in de praktijk is gebracht. De nadruk ligt op de Nederlandse geschiedenis. Het is de eeuw die wordt ingeleid door Kortewegs oratie *Wiskunde als hulpwetenschap* (1881) en Brouwers “vermogen tot het wiskundig bekijken van de wereld” (1907) en afgesloten wordt met controverses rond modelgebruik door het RIVM.

In 1936 publiceerde Jan Tinbergen een *Prae-advies voor de Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek* dat bekend is geworden als het eerste macro-economisch model, de eerste simulatie van de economie van een land. Het was een doorbraak voor “de ingenieurswetenschap der econometrie”. Het betekende evenzeer een doorbraak in de wijze waarop wiskunde ten nutte gemaakt kon worden. Om dit laatste aspect is het hier te doen.

Begrip en praktijk van het wiskundig mo-

delleren zijn nog jong, Tinbergen was een van de eersten die ermee kwam. Anderen binnen het Nederlandse taalgebied waren Jan Burgers en David van Dantzig. Aan deze laatste danken we bovendien de notie dat het niet zozeer om een object gaat, maar om een handeling: wiskundig modelleren. Het wiskundig modelleren was een algemener begrip en het dekte een pragmatischer werkwijze dan het oude “toegepaste wiskunde”.

Deze introductie van het wiskundig modelleren concentreert zich vooral op de Neder-

landse ideeëngeschiedenis. De ontwikkeling loopt van Korteweg tot Van Dantzig en staat niet los van de internationale geschiedenis. Men kan vergelijkbare ontwikkelingslijnen reconstrueren die van Hertz tot Wiener of van Borel tot Destouches lopen. De Nederlandse ontwikkelingen liepen daar zeker niet bij ten achter.

Wiskunde op drift

Midden in de negentiende eeuw raakte de wiskunde in haar rol van voertuig van de waarheid juist in natuurkunde op drift. De ene reactie was die van algehele scepsis ten aanzien van kennis, de andere die van zorgvuldiger nadenken over de rol van de wiskunde.

Aan de hand van auteurs als Lagrange had de wiskunde zich rond 1800 geëmancipeerd uit de mêlée van mathematische wetenschappen. Aan het eind van de Verlichting kwam een autonome en zelfgenoegzame wetenschap naar voren, zuivere wiskunde, losgemaakt uit de vermenging met empirie en bevrijd van theologische bemoeienis met het oneindige. Tot die zuivere wetenschap wiskunde behoorde ook een toegepaste wiskunde, maar de notie van toepassen was bij Lagrange en zijn navolgers zeer beperkt. Het toonbeeld van toepassen was de relatie tussen wiskunde en de rationele mechanica. Dat was het grote voorbeeld dat Lagrange in de nadagen van zijn carrière had uitgewerkt in leerboeken, nadat hij Berlijn en de Akademie

van Frederik de Grote achter zich had gelaten en in Parijs nieuw, revolutionair, elan opdeed. Invloedrijk was ook de hemelmechanica van Laplace. In deze voorbeelden doet men alsof de fysieke werkelijkheid in wezen mathematisch is. De beste weergave van de werkelijkheid is volgens dit denkpatroon een volkomen wiskundig geformuleerde theorie. Het droevig lot van de mensheid, volgens een dergelijke rationalistische optiek, is dat we te maken hebben met een empirie die bedroevend slordig, eventueel “gecompliceerd” is, een empirie die vanuit de theorie benaderd dient te worden. Het benaderen werd letterlijk genomen als wiskundige approximatie. De toegepaste wiskundigen waren dan ook geneigd zich te beperken tot de als wezenlijk mathematisch beschouwde werkelijkheid, namelijk die van de fysica. Zij hielden zich verre van die andere erfenissen van de mathematische wetenschappen van de achttiende eeuw, verre van zulke negentiende-eeuwse kwantificerders als de beoefenaars van de politieke rekenkunde of de statistiek.

Binnen zo'n rationalistische opvatting van wetenschap had de wiskunde een duidelijke plaats. Eenmaal wiskundig geformuleerd zou een theorie vanzelf samenvallen met de wezenstrekken van de betreffende werkelijkheid en dus waar zijn. Wiskunde bood bij uitstek toegang tot de waarheid.

Natuurlijk accepteerde niet iedereen deze visie. Ook voor die negentiende-eeuwse wetenschappers die wel een dergelijk wetenschapsbeeld koesterden, was er iets aan de hand met de formulering van de kinetische gastheorie (Krönig, Clausius) in de jaren 1850 en de vergelijkingen van Maxwell voor het elektromagnetisme in de jaren 1870. In het eerste geval lag er nog een metafoor van botsende biljartballen, in het tweede geval was er geen duidelijk beeld; in beide gevallen waren de theorieën wiskundig geformuleerd, met een overduidelijk verhelderend effect, maar in beide gevallen claimden de auteurs niet de waarheid te hebben weergegeven, slechts een handige, beknopte formulering. Dat riep natuurlijk onontkoombaar de vraag op naar de aard van natuurkundige theorieën en — voor ons het belangrijkste punt — naar de status van de wiskunde daarin.

De situatie in de natuurkunde was illustratief voor de onzekerheid omtrent de rol van de wiskunde in het denken en kennen. De reacties liepen uiteen van scepsis over het menselijk kenvermogen tot pogingen de rol van de wiskunde te verhelderen. Wellicht de bekend-

ste reactie was de scepsis van Ernst Mach, die uit deze toestand de conclusie trok dat al ons kennen op analogieën berust. In dat verhaal was voor de wiskunde verder geen plaats — men zou kunnen zeggen dat de rol van de wiskunde in dat verband is om de structuur te leveren die de verbinding vormt tussen twee zaken die in een structurele analogie met elkaar staan, maar dat is een precisering die in de traditie van Mach niet werd gemaakt. Ook sceptisch, maar qua levenshouding bepaald tegengesteld aan Mach was Emil du Bois-Reymond, de fysioloog — niet de logicus Paul du Bois-Reymond —, met zijn oproep in 1880 om de beperktheid van ons kennen onder ogen te zien: “ignorabimus” (wij zullen niet weten). Felix Klein, de invloedrijkste wiskundige van het eind van de negentiende eeuw, was in de tijd dat hij toepasbare wiskunde nog bij uitstek zag als de wiskunde van de benaderingen, Approximationsmathematik, geneigd tot een soortgelijke zelfbeperking: “Onze uitspraken over de aard der dingen zullen echter bescheidener worden”.

Er was een stroming van meer pragmatisch ingestelde wetenschappers die stelden dat wetenschap hypothesen formuleerde, bij voorkeur in wiskundige taal, en toetste. Poincaré is internationaal de bekendste vertegenwoordiger van dit standpunt. In Nederland werd het verwoord door D.J. Korteweg in zijn oratie *De wiskunde als hulpwetenschap* uit 1881. Wiskunde hielp volgens hem om hypothesen te formuleren uit empirische gegevens en om uit hypothesen consequenties af te leiden — die dan getoetst konden worden.

Een derde type reactie, naast de sceptici en de pragmatici, kwam van geleerden die groot belang hechtten aan het ophelderen van de rol van de wiskunde. Onder de fysici waren dit degenen die bij alle wiskundig instrumentarium uit waren op natuurkundig inzicht en in dat kader een scherp onderscheid handhaafden tussen fysische en wiskundige uitspraken. Von Helmholtz, Hertz, Boltzmann en Ehrenfest stonden in een traditie waarin dit onderscheid belangrijk was. Heinrich Hertz had het nodige bijgedragen aan de elektriciteitsleer en leer van radiogolven en wilde nog iets zeggen over de mechanica. Wat Maxwell voor de elektriciteitsleer had gedaan, “handig opschrijven” en zo tot een gemakkelijk hanteerbare en herkenbare formulering komen, meende Hertz ook voor de traditonele theorie van de mechanica te kunnen doen. Het “handig opschrijven” leverde een indrukwekkende, maar voor velen moeilijk herkenbare formulering op. In het voorwoord van *Die Prin-*



D.J. Korteweg

zipien der Mechanik – in neuem Zusammenhang dargestellt uit 1894 legde hij uit hoe dat volgens hem denkbaar was, dit vrijelijk gebruik maken van wiskunde. Hertz zette het idee van enkelvoudige toepassing van wiskunde op losse schroeven door een drietal logisch-mathematische “Bilder” van de mechanica tegen elkaar af te wegen op hun *geschiktheid* om de fysische inzichten weer te geven. Er was dus meer in het spel dan streven naar waarheid.

“De procedure (das Verfahren) waarvan we ons steeds bedienen wanneer we uit vroegere gebeurtenissen toekomstige willen afleiden en zo een beoogd doel willen bereiken, is de volgende: we vormen innerlijke schijnbeelden (Scheinbilder) of symbolen van voorwerpen buiten ons, en wel zodanige beelden dat de logische gevolgen van de beelden (denknotwendigen Folgen der Bilder) telkens ook weer beelden zijn van natuurnoodzakelijke gevolgen van de afgebeelde voorwerpen.” [1]

De procedure is dus dat wij ons beelden maken. Hertz tekende hierbij nog aan dat, zou er aan de hier geformuleerde eis voldaan kunnen worden, er op voorhand zekere overeenstemming tussen de natuur en ons denken (unserem Geiste) zou moeten bestaan, maar liet het daar verder bij. De ervaring leerde hem dat dit het geval was. De “beelden” hoefden overigens slechts op dit ene wezenlijke punt met de dingen overeen te stemmen: dat de logische (denknoodzakelijke) gevolgen van de beelden weer beeld zouden

zijn van de natuurnoodzakelijke gevolgen van de afgebeelde voorwerpen. Verdere overeenkomst tussen onze voorstelling en de dingen was voor het doel niet nodig, stelde hij, en zouden we ook niet kunnen kennen.

“Is het ons eenmaal gelukt om uit de ervaring die we tot nu toe hebben opgedaan beelden met de verlangde eigenschappen af te leiden, dan kunnen we met behulp van deze beelden, zoals we dat met modellen doen, in korte trekken de gevolgen laten zien, die zich in de buitenwereld pas na lange tijd of als gevolg van ons eigen ingrijpen zullen voordoen.” [2]

Hertz hield het duidelijk bij “zoals”, “wie an Modellen”. Modellen en systemen waren materieel; zo niet fysiek, dan toch fysisch gedacht.

“De overeenstemming tussen ons denken en de natuur is dus te vergelijken met de overeenstemming tussen twee systemen, die model van elkaar zijn. We kunnen deze overeenstemming zelfs verantwoorden als we willen aannemen dat ons denken in staat zou zijn werkelijke dynamische modellen van de dingen te vormen en daarmee te werken.” [3]

Zo vergeleek Hertz “Bild” en “Modell”, maar ondanks deze inspiratie hield hij het wat de rol van wiskunde en axioma's betreft bij Bild. De rol van de wiskunde was op drift geraakt en de geschiedenis van het preciseren van deze rol is hiermee dus niet afgerond, ze begint eigenlijk pas.

De blokkade van Boltzmann

In de tijd van Hertz, eind negentiende eeuw, was de productie van wiskundige modellen een bescheiden discipline. Uitgevers en ondernemende professoren legden zich toe op het vervaardigen van modellen in draad, gips en karton. Hoogtijdagen waren de grote tentoonstellingen in Kensington Park, Londen 1872, en in München 1893. Men treft in de meeste universiteiten nog restanten aan van de destijds met liefde aangelegde modellenverzamelingen.

Veraanschouwelijking van wiskundige samenhangen was het nut van zulke objecten en dat was indertijd speciaal relevant, omdat de theoretische ontwikkeling van de analyse de behandeling van hogeregraads oppervlakken binnen bereik had gebracht. En zelfs voor de bijziende Ludwig Boltzmann betekende de aanblik van zo'n model meer — en stimuleerde de wiskundige creativiteit meer — dan bladzijden vol formules. Boltzmann werd

door de gipsmodellen geblokkeerd in zijn filosofische creativiteit. Hij beschikte over alle elementen en over de visie om het hedendaagse begrip wiskundig model te formuleren en weigerde met zoveel woorden. Een model moest *tastbaar* zijn, zo schreef hij zowel in een artikel in de catalogus van de Münchense tentoonstelling als in het lemma ‘Model’ in de *Encyclopaedia Britannica*. Hij signaleerde scherp dat Hertz, Mach en Planck anders omgingen met de wiskunde in de fysica dan tot dan toe gebruikelijk was, dat ze hun waarheidsoordeel opschortten en zich lieten leiden door overwegingen van denkeconomie, dat mechanische modellen een belangrijke functie hadden in die nieuwe ontwikkeling — en daar hield het op. De blokkade van Boltzmann was tweeledig. De term wiskundig model was bezet en het was voor hem ondenkbaar om wiskunde te zien als een materie waarin men iets kon uitdrukken. De term wiskundig model was in gebruik voor tastbare, buitenwiskundige objecten waarin een wiskundig verband uitgebeeld werd: gips, draad of karton. En abstracte modellen waren wel toegestaan in de natuurkunde, maar Boltzmann kon er niet toe besluiten de wiskundige structuren die dergelijke objecten beschreven zelf een soort quasi-stoffelijkheid toe te kennen. Wiskunde kon in zijn ogen niet dienen als “materie” om iets anders in uit te drukken.

Zonneklaar was intussen dat er iets aan de hand was met de rol van de wiskunde. De plaats van de wiskunde was verschoven en de claim dat wiskundige formulering zonder meer in de richting van de waarheid zou voeren was gerelativeerd, maar echt opgehelderd was de zaak rond 1900 bepaald niet. Verschillende wiskundigen suggereerden termen als systeem, schema, hypothese etc. waar Hertz “Bild” had gezegd, maar deze suggesties losten de vraag niet op. Ook Nederlanders waren actief in deze discussie.

Zo verwoordde Brouwer in zijn proefschrift in 1907 het algemeen vermogen dat de mensen is gegeven tot het “wiskundig bekijken van hun leven”. Gerrit Mannoury, de significus, had het in zijn inaugurale rede *De sociale beteekenis van de wiskundige denkvorm* (1917) over de ballisticus die met betrekking tot kogelbanen de “parabool-illusie” hanteert. J.A. Schouten sprak in ‘Meetkunde en ervaringsstructuur’ (1939) van “schema” en “structuurschema”. Diverse auteurs gebruikten het woord “systeem”, zowel met betrekking tot de beschreven werkelijkheid als tot een axiomastelsel. David van Dantzig voegde daaraan toe, dat een fundering van, bijvoorbeeld, de waarschijnlijkheidsrekening

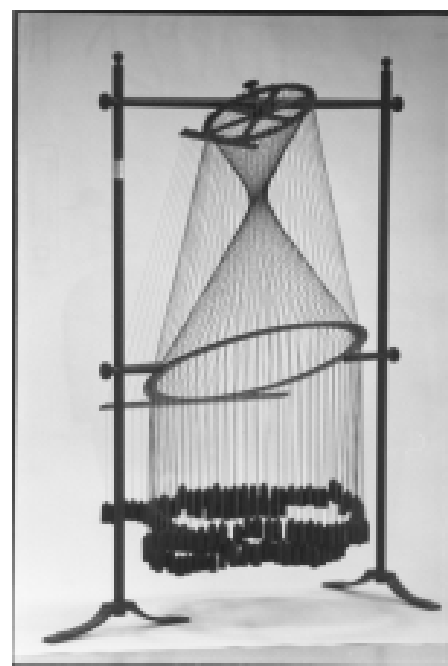
niet slechts een “formalistisch systeem” behoefde, maar ook een “geregulariseerd model” van de werkelijkheid (1940).

Ehrenfest

Het was niet ongebruikelijk om dan maar helemaal niets meer te claimen wat betreft de status en het werkelijkheidsgehalte van de theorie. Binnen de natuurkunde was Willard Gibbs een van degenen die zich tot woordvoerder maakten van de pragmatische, zo men wil sceptische, richting. In het voorwoord van zijn leerboek over statistische mechanica, juist het terrein waarop Krönig en Clausius de zaak aan het rollen hadden gebracht, schreef hij met betrekking tot het werkelijkheidsgehalte van zijn theorie:

“Difficulties of this kind have deterred the author from attempting to explain the mysteries of nature and have forced him to be contented with the more modest aim of deducing some of the more obvious propositions relating to the statistical branch of mechanics. Here, there can be no mistake in regard to the agreement of the hypotheses with the facts of nature, for nothing is assumed in that respect.” [4]

Een dergelijke scepsis wees Paul Ehrenfest, leerling van Boltzmann, scherp af. In het overzichtsartikel dat hij in 1911 met zijn vrouw Tatjana Ehrenfest-Affanasjewa schreef over de ontwikkelingen van dit gebied werd Gibbs' houding veroordeeld. Als verklaren niet meer zou zijn dan beschrijven en als hypothesen zo prag-



Ceci n'est pas un modèle mathématique



L.E.J. Brouwer

matisch gekozen konden worden, dan waren we overgeleverd aan de willekeur, want dan:

“De kinetische “verklaringen” worden *afbeeldingen* en dan worden ook deze beide groepen van “hypotheses” *willekeurige bepalingen over de structuur van het afbeeldende schema*; bepalingen namelijk
1) over de structuur van het gasmodel
2) over de keuze van de waaier van bewegingen.” [5]

Het was de Ehrenfests nog immer te doen om fysisch inzicht. De rol van de wiskunde moest derhalve dienend zijn en niet iedere natuurkundige waarheidsaanspraak onderuit halen. Juist het vasthouden aan het natuurkundige van de natuurkunde maakte dat zij een scherp oog hadden voor de rol van de wiskunde.

Paul Ehrenfest werd in 1911 in Leiden benoemd tot opvolger van Lorentz. Met zijn persoonlijkheid en zijn uitgesproken visie was hij een invloedrijk leermeester. Onder zijn leerlingen waren vooraanstaande natuurkundigen, technici en wiskundigen [6]. Het vooropstellen van natuurkundig inzicht, en in het verlengde daarvan de aandacht voor de rol van de wiskunde, was een hoofdelement uit de traditie van Von Helmholtz, Hertz en Boltzmann, dat hij doorgaf aan zijn leerlingen. We zullen hierna in het bijzonder de bijdragen van Tinbergen en Burgers bespreken.

“Model” kwam intussen in de theoretische fysica wel voor, maar dan als gedachtenmodel, met dezelfde status als een gedachtenexperiment. Het bovenstaande citaat van Ehren-

fest illustreert dat. Het kinetisch gasmodel, in feite een biljartballenmetafoor, en het atoommodel waren de belangrijkste voorbeelden. Ernst Mach, Boltzmanns tegenstrever op filosofisch terrein en inspirator van de Wiener Kreis, doordacht het gebruik van metaforen en het denken in analogieën en ontleende hieraan de nodige scepsis ten aanzien van de werkelijkheidswaarde van wetenschappelijke theorieën. Noch de Wiener Kreisleden, echter, noch Von Mises, met zijn *Kleines Lehrbuch des Positivismus*, zetten de stap van analogie naar “wiskundig model”.

Het “Bild” van Hertz was ook iets anders dan de bekende vormen van analogie, het was de verzelfstandiging van de middelterm van een analogie: de structuur die het gemeenschappelijke was aan twee analoge fysische toedrachten kreeg een eigen status en kon als wiskundige structuur een zelfstandige entiteit vormen.

Pas Wittgenstein pakte de draad van Hertz weer op en wist de blokkade van Boltzmann te overwinnen. In zijn *Tractatus logico-philosophicus* stelde hij:

- 2.1 We vormen ons beelden van de feiten
- 2.11 Het beeld presenteert de situatie in de logische ruimte, het bestaan en niet bestaan van toedrachten
- 2.12 Het beeld is een model van de werkelijkheid [7]

De zoekende wiskundigen en natuurkundigen zijn niet rechtstreeks merkbaar door Wittgenstein beïnvloed. De plaats waar de wiskunde haar nieuwe rol speelde was wel duidelijk, maar de begrippen ervoor bleven vaag.

Burgers

Het waren twee leerlingen van Ehrenfest die bijna terloops het begrip poneerden waarmee de zoektocht tot rust zou komen. Zowel Jan Burgers in de stromingsleer als Jan Tinbergen in de econometrie kwamen met de notie van wiskundig model.

Jan Burgers werd in 1918 direct na zijn promotie bij Ehrenfest benoemd tot hoogleraar Aero- en Hydrodynamica aan de Technische Hoogeschool in Delft. Hij zou zijn hele loopbaan wijden aan de theorie van turbulentie, speciaal grenslaagproblemen. Zijn grote streven was inzicht te verwerven in het ontstaan van wervelingen. Het leidde tot de Burgersvergelijking [8], een van zijn hoofdresultaten. Hij kon dankzij zijn wetenschapsideaal in 1955 bij de terugblik op zijn Delftse tijd zonder veel pijn toegeven in technisch-praktisch opzicht door anderen te zijn voorbijgestreefd:

“Langs die weg is veel bereikt dat ik met



Gerrit Mannoury

mijn model niet kon: doch wat niet bereikt is, is een om zo te zeggen “absolute theorie”, die, uitgaande van de grondgegevens, tot de werkelijke sterkte van de turbulentie met haar verschillende aspecten voert. De theorie van de zg. “isotrope homogene turbulentie” kan laten zien hoe een eenmaal gegeven turbulentie zich ontwikkelt, doch hierbij wordt van een hypothetische formule gebruik gemaakt, die vele vraagstukken openlaat. Ik geloof te mogen zeggen dat ik voor mijn vereenvoudigd model meer principiële dingen kan bereiken.” [9]

Dit gedreven vasthouden aan theorievorming als uiteindelijk doel was traditioneel, om niet te zeggen ouderwets voor de tijd waarin Burgers functioneerde. Het gaf hem een voorgrond in het nadenken over een kwestie die andere natuurkundigen en ingenieurs verontachtzaamd hadden, de rol van de wiskunde. Zijn theorie was niet af. Burgers nam slechts genoegen met de wiskundige verwoording ervan als iets voorlopigs, als een partiële uitbeelding. De conceptuele ontwikkelingsgang laat zich aflezen uit de opeenvolging van titels van publicaties over het onderwerp (zie inzet op pagina 63).

Deze opeenvolging zegt eigenlijk al genoeg: “Wiskundige voorbeelden ter illustratie ...”; “Een model systeem ter illustratie” en “...de behandeling van enige wiskundige modelsystemen en later “Een wiskundig model ter illustratie ...” en in 1955 tenslotte gewoon “een wiskundig model voor ...”. Burgers was te secuur om de later gangbare uitdrukking “wiskundig model van” te gebrui-

ken. Hij bracht hiermee een belangrijke karaktertrek van wiskundige modellen tot uitdrukking, namelijk dat er iets wordt uitgebeeld in wiskundige stof. Voorzover het om de term gaat, gebruikte Burgers waarschijnlijk in 1940 voor het eerst de woordcombinatie in de zin van “systemen van vergelijkingen [...] die de rol van een mathematisch “model” kunnen spelen” [10]. Het model betekende bij Burgers niet “partiële theorie”, maar in de lijn van Hertz en Ehrenfest partiële uitbeelding van theorie in de quasirealiteit van de wiskunde. Burgers’ notie van wiskundig model werd in eerste instantie betrekkelijk snel aanvaard in de wetenschappelijke ingenieurswereld, in tweede instantie overgenomen in de natuurkunde en andere klassieke toepassingsgebieden. Een typisch research-rapport uit Delft of van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium in de jaren 1940 gaf na de verbale omschrijving een stelsel vergelijkingen onder het kopje “de theorie” of simpelweg voorafgegaan door het zinnetje “dit kan geschreven worden als ...”. In de loop van de jaren vijftig werd het de gewoonte zo’n stelsel te benoemen als “het model” of “het wiskundig model”.

Tinbergen

Jan Tinbergen, ook een leerling van Ehrenfest, besprak in een artikel uit 1938 over conjunctuurgolven een model, een zeer elementair voorbeeld van zijn economische modellen — alsof het de gewoonste zaak van de wereld was (zie inzet op pagina 64). Twee jaar eerder echter had hij hard gewerkt om dit te mogen doen, in het beroemde Prae-advies voor de Vereniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek over de vragen:

“Kan hier te lande, al dan niet na overheidsingrijpen, een verbetering van de binnenlandse conjunctuur intreden, ook zonder verbetering van onze exportpositie?”

Welke leering kan te aanzien van dit vraagstuk worden getrokken uit de ervaringen van andere landen?” [12]

Het gaat, zei Tinbergen, bij deze vragen om repercussies van de ene economische grootheid op de andere, macro-economisch te beschouwen, maar:

“De kwalitatieve stylering, d.w.z. indeling van mensen, goederen enz. in grote groepen is nog niet voldoende. Er moet met *getallen* gewerkt worden; kwantitatief gestyleerd worden. [...]”

“Ik concludeer dus tot de noodzakelijkheid van de *kwantitatieve stylering van het economisch proces*”.

Nadat de beschouwde grootheden waren geïntroduceerd, werd de lezer een stap verder gevoerd:

“[...] het ‘model’ dat in het volgende gegeven wordt van het Nederlands economisch leven [...]”.

En op het punt waar tenslotte de 24 basisvergelijkingen waren gegeven, heette het geruststellend dat er geen principieel onderscheid was tussen de hier gevolgde methode en de gebruikelijke economische redeneringen:

“de relaties [...] worden nu in de mathematische machine geworpen en het resultaat komt er min of meer pasklaar uit. [...] het economische model [...]”.

Hij had er welbewust naar toe gewerkt het begrip model te poneren en zonder aanhalingstekens te mogen gebruiken in de “ingenieurswetenschap der econometrie” [13].

In de geschiedenis van de economische wetenschap is het belang van dit Prae-advies dat er voor het eerst een “macro-economisch model” wordt opgesteld. Voor de huidige beschouwing ligt het belang in het feit dat voor



Paul Ehrenfest (portret door Heike Kamerlingh Onnes, Stedelijk Museum Amsterdam)

het eerst een stelsel wiskundige vergelijkingen, een mathematische machine, werd gepresenteerd als model. In 1933 sprak Tinbergen bijvoorbeeld nog van “(verklarend) mechanisme” [14].

Tinbergens werk was exemplarisch voor wat er gebeurde in het veld van statistiek en politieke rekenkunde dat na 1800 buiten de zuivere en toegepaste wiskunde was komen te staan. Het vond daar ook navolging, allereerst in de econometrie zelf en vervolgens in de statistiek, de demografie, de bedrijfsleer en zovoorts.

Het cruciale aspect van het opstellen van een wiskundig model was, dat de overheersende intentie hier niet zonder meer werkelijkheidsapproximatie was, maar sturing van de beschreven werkelijkheid. Bij Tinbergen was deze intentie het motief om zich überhaupt met conjunctuurverschijnselen bezig te houden: crisisbestrijding. “We komen nu tot de vraag die tenslotte de stoot heeft gegeven tot al onze voorafgaande studies: kan het conjunctuurverschijnsel bestreden worden? Dat de bestrijding wenselijk is, staat voor ons vast.”

Hoofdeis was wel “dat de gang van zaken in het mechanisme met de werkelijke gang van zaken overeenstemt”, maar men hoefde van Tinbergen strikt genomen niet de oorzaken te kennen, slechts “de opeenvolging der gebeurtenissen en hun samenhang te beschrijven; ‘slechts’ de *gevolgen* van *maatregelen* die men neemt”.

Hertz had de mogelijkheid van uiterlijke beschrijving ook wel geopperd, maar doelmatigheid was toch allereerst begripsmatige zuinigheid. Bij Tinbergen ging het om adequaatheid aan een gegeven doel; waarheid blootleggen of de werkelijkheid benaderen waren vanuit zijn perspectief mogelijke doelen, naast andere. Voorop stond het instru-

Een selectie van Burgers’ publicaties over turbulentie

[Burgers 1939] ‘Mathematical Examples Illustrating Relations Occurring in the Theory of Turbulent Fluid Motion’ /J.M. Burgers. In: *Verh. KNAW Eerste Sectie* 17 - 2 (1939), pp. 1–53.

[Burgers 1940a] ‘Application of a Model System to Illustrate Some Points of the Statistical Theory of Free Turbulence’ /J.M. Burgers. In: *Proceedings KNAW* 43 (1940), pp. 2–12.

[Burgers 1940b] ‘On the Application of Statistical Mechanics to the Theory of Turbulent Fluid Motion. - A Hypothesis Which can Serve as a Basis for a Statistical Treatment of Some Mathematical Model Systems’ /J.M. Burgers. In: *Proceedings KNAW* 43 (1940), pp. 936–945, pp. 1153–1159.

[Burgers 1948] ‘A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence’/J.M. Burgers. In: *Advances in Applied Mechanics* 1 (1948), pp. 171–199.

[Burgers 1955b] ‘A Model for One-Dimensional Compressible Turbulence with Two Sets of Characteristics’ /J.M. Burgers. In: *Proceedings KNAW* B58 (1955), pp. 1–18.

mentele perspectief met “het mechanisme” en “de mathematische machine”.

Aanvankelijk was het voor Tinbergen, geheel in de lijn van Ehrenfest, de aspiratie om zijn sociaal engagement invulling te geven met een absolute mathematische theorie van de economische bewegingsleer. In die sfeer had hij ook in zijn proefschrift minimumproblemen van een bepaald type wiskundige vergelijkingen behandeld met appendices waarin de resultaten werden toegepast op natuurkunde en economie [15]. Zo'n algemene theorie kwam er niet uit en zelfs de partiële theorieën hadden niet de eigenschap dat de systematische bewegingen, dat wil zeggen de dynamiek inherent aan het stelsel vergelijkingen, overeenstemden met de conjuncturele bewegingen in de door Tinbergen onderzochte economische sectoren [16]. Hier liet

een zeker kengebied en daaruit voortvloeiend een scherp oog voor de rol van de wiskunde, die ingaf zo lang mogelijk voort te gaan binnen het paradigma van de toegepaste wiskunde. Op basis hiervan waren zij beiden zich zozeer bewust van de manier waarop zij gebruik maakten van wiskunde dat zij konden komen tot de formulering van het begrip wiskundig model. Met dat ze dit expliciteerden kwam een nieuwe manier van doen tot stand, een nieuwe praktijk.

Tinbergen had aanvankelijk als dienstweigeraar, later als gewoon medewerker, zijn denkbeelden uitgewerkt bij het *Bureau voor conjunctuuronderzoek* van het Centraal Bureau voor de Statistiek.

De succesvolle presentatie van het economisch model in 1936 trok internationaal de aandacht. De Volkenbond haalde hem naar

veerd bij zijn studievriend Van der Waerden, maar was in alle opzichten een leerling en adept van Gerrit Mannoury. Mannoury belichaamde hoogstpersoonlijk de significa, de leerder verstandhouding. Mannoury had hem overgehaald wiskunde te studeren en het was op de significa dat Van Dantzig zijn denken over wiskunde en over wiskundig modelleren in het bijzonder baseerde.

Tegen de conjunctuur in maakte Van Dantzig in de jaren 1930 carrière aan de Technische Hoogeschool te Delft, van assistent van J.A. Schouten tot hoogleraar. Hij ontwikkelde niet alleen de ambitie om de wiskunde maatschappelijk dienstbaar te maken, een ambitie die na de Tweede Wereldoorlog tot volle bloei kwam in het Mathematisch Centrum, hij dacht over die dienstbaarheid van het vak ook na. In 1939 en 1940 sprak en schreef hij op terloopse wijze van wiskundig model, formalistisch systeem en geregulariseerd model, in dezelfde stijl als Tinbergen en Burgers dat in diezelfde jaren deden. In 1940 traden Burgers en Van Dantzig op dezelfde studiedag van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging over Waarschijnlijkheidsrekening en Statistische Methoden [17] en beiden bezigden de notie “mathematisch ‘model’”. De combinatie van deze aanzet met een poging voorbeelden te verzamelen van het gebruik van statistische methoden en zijn signifiante denkbeelden brachten Van Dantzig tot een ommekeer. In 1945 kwam hij op de verhouding wiskunde–werkelijkheid terug, maar als hoofdonderwerp. Nu was een wiskundig model niet een afbeelding of illustratie van iets anders meer, maar een eigen object. Het ging bovendien niet meer om dit object, maar om de activiteit van het *wiskundig modelleren*. Met een uitdrukking van Mannoury karakteriseerde hij dit ook als “inschakelen en uitschakelen van het formalisme”.

De activiteit van het wiskundig modelleren, de procedure, de werkwijze, gaf Van Dantzig in verschillende publicaties weer in schematisch overzicht (zie figuur 1). Hij behandelde de werkwijze en begrip ter inleiding van zijn colleges statistiek en waarschijnlijkheidsrekening. Hij gaf er een afzonderlijke collegencyclus over in Delft, *Wiskunde, logica, ervaringswetenschappen*. Zijn bewustzijn dat hij een algemene manier van doen op het spoor was, bracht hij het duidelijkst tot uiting in de titel van het artikel ‘General procedures of empirical science’ [18].

Van Dantzig was intussen hoogleraar mathematische statistiek aan de Universiteit van Amsterdam en van daaruit kon hij zijn visie op deze manier van bruikbaar maken van wis-

Een model van Tinbergen uit [11]

Een voorbeeld van een mechanisme dat vertragingssgolven vertoont is het volgende model. De volgende economische grootheden worden beschouwd:

L het arbeidersinkomen,

Z het niet-arbeidersinkomen, kortweg ‘winst’ te noemen,

U de waarde der verkochte consumptiegoederen,

V de waarde der verkochte investeringsgoederen,

De volgende betrekkingen worden aangenomen tussen deze grootheden, welke alle worden gemeten als afwijkingen van een bewegend evenwicht.

(1) De winstvergelijking [...]

$$Z = U + V - L$$

(2) [...] een vertraging aangenomen van één tijdseenheid [...]

$$V_t = \beta Z_{t-1}$$

(3) [...] de uitgaven voor consumptiegoederen [...]

$$U_t = L_t + \epsilon_1 Z_{t-1} + \epsilon_2 (Z_{t-1} - Z_{t-2})$$

Men vindt op eenvoudige wijze dat voor bijvoorbeeld Z de bewegingsvergelijking geldt:

$$Z_t - (\beta + \epsilon_1 + \epsilon_2)Z_{t-1} + \epsilon_2 Z_{t-2} = 0.$$

hij zijn praktisch-politieke doelstellingen de doorslag geven en stelde hij zich tevreden met modellen als illustratie bij politieke voorstellen tot planning. In het licht van de criteria van Ehrenfest, vasthouden aan streven naar inzicht in de economie, had Tinbergen dus gefaald. Maar juist door tot het uiterste vast te houden aan deze criteria en pas op het laatste moment een pragmatische wending te nemen, faalde hij zo groots dat het resultaat niet zomaar een illustratie was, maar een nieuwe wetenschap, de econometrie. Tinbergen was ook in internationaal perspectief een van de grondleggers van deze “ingenieurswetenschap”.

Net als in het geval van Burgers was het de vorming bij Ehrenfest, streven naar inzicht in

Genève om een economisch model van de Verenigde Staten op te stellen. Na de Tweede Wereldoorlog richtte de Nederlandse regering het Centraal Planbureau op, met Tinbergen als eerste directeur. Het modelleren in dienst van beleid had in het Planbureau zijn eerste toonbeeld. Zowel binnen Nederland op andere beleidsterreinen, zoals het Sociaal-cultureel Planbureau, als in economische adviesbureaus in andere landen vond het navolging. Het is maatschappelijk wellicht de invloedrijkste vorm van wiskundig modelleren geworden.

Van Dantzig

David van Dantzig was een generatiegenoot van Burgers en Tinbergen. Hij was gepromo-



Jan Tinbergen (zittend midden) met het Bureau van conjunctuuronderzoek (1936). Staand tweede van links S. de Wolff (zie [11]).

kunde verbreiden: via onderwijs, via cursussen voor de Vereniging voor Statistiek, door advieswerk vanuit het Mathematisch Centrum en door collega's in empirische wetenschappen die de boodschap rechtstreeks bij Van Dantzig haalden.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1. Experience | Forgetting |
| 2. Recollection | Simplification |
| 3. Observation | Ellipsis |
| 4. Description | Regulation |
| 5. Model | Switching on |
| 6. Formalisation | Absolutising |
| 7. Induction | Arranging |
| 8. Axiomatising | Deduction |
| 9. Extension | Switching off |
| 10. Interpretation | Inductive behaviour |
| 11. Expectation | Volition |
| 12. Action | |

Figuur 1 De empirische cyclus: Van Dantzig's schema van in- en uitschakelen van het formalisme. Uit [Dantzig 1947], zie [18].

Procedure

Met Van Dantzig's "general procedures" keren ook de geciteerde woorden van Hertz terug, het Verfahren, de werkwijze. De procedure is er een van uitbeelden, veeleer dan van afbeelden.

Voorzover een model als beeld voor iets wil dienen, moet het als beeld correct zijn — de structuur van het beeld moet overeenstemmen met een structuur van de werkelijkheid;

consistent, doelmatig en zuinig. Hertz gaf deze criteria weer. Het waren de gebruikelijke eisen aan wetenschappelijke theorievorming in relatie tot empirie, met dien verstande dat uitdrukkelijk vermeld was dat de correctheid, of waarheid, een partiële afbeelding betrof en verschillende beelden kon toelaten. De keuzevrijheid was een toevoeging van Hertz. Het beste beeld was het meest terzake; ten eerste het zuinigste — zonder overbodige elementen, ten tweede het makkelijkste voor berekening of andere doelen. Wat het beste beeld was, hing dus af van het doel; het doel van wetenschap had tot dan toe eenzinnig vastgelegen, namelijk de essentie van de betrokken werkelijkheid weer te geven, "waarheid" in hogere zin.

Was hiermee een niet mis te verstane relativisering gegeven van het ideaal van wetenschappelijkheid, de variatie in doelstellingen liet daarenboven heel andere oriëntaties toe. Het doel waarvan de geschiktheid van de wiskundige structuur afhing, kon niet alleen partiële of voorlopige waarheid zijn en zo een bescheidenheid ten opzichte van het wetenschapsideaal betekenen; het doel kon van alles zijn, met name een praktisch of maatschappelijk doel. We zagen aan het voorbeeld van Tinbergens modelvorming ten volle hoeveel conceptuele ruimte hier verworven is. De vierde, nieuwe eis aan een model is dus dat het geschikt moet zijn, adequaat aan een doel.

Zowel bij Tinbergen als bij Van Dantzig kwam naar voren dat niet de werkelijkheid op zich vertrekpunt is van modelvorming: vooraf gaat een kwantitatieve stylering, een geregulariseerd model van de empirie, met andere woorden een kwantificering of mathematisering. Eerst daarna volgt de opstelling van het wiskundig model, de inschakeling en uitschakeling van het formalisme, met andere woorden de mathematisch abstractie. We komen dus niet zomaar bij de wiskunde uit, daar moeten eerst de geëigende stappen voor gezet worden. Het denkbeeld dat de wiskunde zich zou lenen om zich in uit te drukken, als een ideale materie, moest eerst nog veroverd worden. Historisch was het misschien de kortzichtigheid van Boltzmann dat hij deze stap niet wist te zetten; begripmatig was hier werkelijk een blokkade te overwinnen, moest een nieuwe visie op wiskunde ontwikkeld worden. Het idee moest geaccepteerd worden dat wiskunde als een "stof" zou kunnen dienen waarin men zich uitdrukt.

Samengevat reikt het historisch overzicht van de speurtocht, die tot rust kwam bij de notie van wiskundig model, de volgende systematische elementen aan.

Wiskundig modelleren is het in wiskunde uitdrukken van wat men ergens van denkt. Uitdrukken in wiskunde legt de beperking dat het in kwantiteiten of wiskundige structuren gezegd wordt. Wat men ergens van denkt kan wel de vorm hebben van een axiomastelsel, maar dat hoeft helemaal niet. De omweg via de logica is niet verplicht. Het kan zijn, zoals bij Burgers, dat de gedachte de vorm heeft van een natuurkundige theorie die men met wiskundige objecten wil illustreren. Een gangbare vorm van een wiskundig model is een stelsel vergelijkingen. Een model moet consistent zijn, correct en zuinig en daarenboven adequaat. Adequaat wil zeggen geschikt voor het gesteld doel. Om succesvol te modelleren moet men zich dus een doel gesteld hebben, anders is niet uit maken welk model adequaat is. Waarheidsvinding is maar een van de mogelijke doelen.

Verbreiding

Niet alleen in de Nederlandse, ook in de internationale literatuur, is het in de loop van de jaren zestig en zeventig in alle empirische wetenschappen volstrekt gebruikelijk geworden te spreken van wiskundig modelleren. Er zijn wetenschappen als econometrie, bedrijfskunde, bestuurskunde of de informatica die zonder het modelleren dat eraan ten grondslag ligt niet zouden bestaan, of niet de



David van Dantzig

status van wetenschap zou hebben. Wiskundigen en logici als Norbert Wiener, John Tukey, John G. Kemeny hebben de notie van wiskundig model verbreed. Kemeny identificeerde in *A philosopher looks at science* (1958) zelfs in het algemeen "scientific method" als wiskundig modelleren.

De introductie van het begrip "wiskundig model" bij Tinbergen en Burgers heb ik terloops genoemd omdat ze er geen hoofdthema van maakten. Toch waren ze zich, getuige de aanhalingstekens bij eerste gebruik, zeer wel bewust van de terminologische vernieuwing die ze pleegden. Van Dantzig is in het Nederlandse taalgebied degene geweest die er conceptueel een punt van heeft gemaakt. Hij was ook degene die vasthield aan modelleren als handeling of als procedure.

Van Dantzig maakte school. Baarda in de geodesie, Engelfriet in de verzekeringswetenschap en Sittig in de toegepaste statistiek beriepen zich rechtstreeks op hem. A.D. de Groot in de psychologie, R. Mokken in de politicologie en Chr. Rümke in de medische research waren veeleer geestverwanten dan leerlingen. Via colleges, cursussen van de VVS en statistische consultatie van het Mathematisch Centrum verbreidde zich de boodschap van wiskundig modelleren. R. Timman richtte in 1955 de wiskundig-ingenieursopleiding op. Dit was de wiskundig modelleeropleiding bij uitstek. Eerst rond 1970 zouden de instellingen deze opleiding ook zo formuleren.

Burgers was een van de geleerden dankzij wie het begrip wiskundig modelleren in

de jaren vijftig voorhanden was in de technisch wetenschappelijke research. Er is geen duidelijk spoor van receptie te reconstrueren. De term was er eenvoudig en vond zijn weg. Vanaf 1960 wordt hij overal gebezigd.

Tinbergens geschriften en optreden hebben wel navolging gekregen. Men is algemeen gaan spreken van macro-economische modellen. Het Centraal Planbureau was het voorbeeld voor de zusterinstellingen en diende als toonbeeld voor andere bureau's. Begrip en praktijk van wiskundig modelleren verbreidden zich op deze manier, ze zijn geïnstitutionaliseerd.

De wetenschap econometrie dankt zijn bestaan wel heel direct aan wiskundig modelleren. De invloed reikt hier echter vele malen verder dan het opleiden van studenten in het vak [19]. Bedrijfseconometrie, bedrijfskunde, ontwikkelingsprogrammering, bestuurskunde, en zoveel andere technische en toegepast sociaalwetenschappelijke disciplines steunen op noties van wiskundig modelleren.

De werkelijke culturele invloed van het wiskundig modelleren reikt nog een hele stap verder. Het hele beeld van de wetenschap is met de opkomst van het wiskundig modelleren verschoven. Het zou overdreven zijn die over de hele linie een gevolg van het wiskundig modelleren te noemen, maar de gelijktijdigheid is geen toeval. Te beginnen met econometrie en bedrijfskunde (management science, operations research) hebben zich vanaf de jaren vijftig een reeks van kundes gevestigd die er van meet af aan slechts een betrekkelijk waarheidsstreven op na durfden te houden. Hun gerichtheid op partiële kennis of op het nastreven van buitenwetenschappelijke doelen (wiskundig ingenieursopleiding, geneeskunde, milieukunde) diskwalificeerde hen niet als wetenschappen, integendeel. Ook van de traditionele wetenschappen is het waarheidsstreven sinds de jaren zestig gedeconstrueerd. Claims op eenduidige kennis zijn ontmaskerd als ouderwets positivistisch. Wat men hiervan ook denken mag, een feit is dat ons complete ideaalbeeld van wetenschap sinds 1900 radicaal op de helling is gegaan. De opkomst van het wiskundig modelleren stond aan de wieg van deze ontwikkeling. Wat begon met econometrie als een uitzondering is nu de norm geworden. Het vak had beperkte waarheidsaspiraties en grote handelingspretenties. Niet voor niets sprak Tinbergen van de "ingenieurswetenschap der econometrie".

Dat het opschorten van de aspiraties waar-

heid te bieden nu de norm geworden is, is voor de bruikbaarheid van de wiskunde niet negatief. Van de binnenkant gezien heeft het wiskundig denken inderdaad in het wiskundig modelleren een vorm van bruikbaarheid gevonden die zeer breed inzetbaar is. Het is veel flexibeler dan het vroegere idee van toegepaste wiskunde. Van buitenaf gezien is het aantal wetenschappen dat een beroep doet op wiskunde alleen maar toegenomen. Van taalkunde tot metaalkunde regent het proefschriften waarin wiskundige modellen voor bepaalde probleemgebieden worden ontwikkeld. Of ze van de hand van wiskundigen zijn is de vraag.

Actualiteit

Bernard de Fontenelle, de vader van de Verlichting, heeft ruimschoots zijn zin gekregen. Het is altijd nuttig, vond hij, helder te denken, zelfs over nutteloze zaken. En:

"Het wiskundig denken (Esprit Géométrique) zit niet zo vast aan de wiskunde, dat het er niet van kan worden losgemaakt en overgebracht op andere gebieden van kennis. Een werk op het terrein van de ethiek, van de politiek, van de tekstkritiek, en wellicht zelfs op het gebied van de welsprekendheid wordt er onder overigens gelijke omstandigheden mooier op, wanneer het van de hand van een wiskundige is. De orde, de helderheid, de beknoptheid en de nauwgezetheid die sinds enige tijd in de betere boeken waar te nemen zijn, konden wel eens hun oorsprong vinden in dit wiskundig denken, dat zich meer dan ooit verbreedt, en dat op een of andere manier zelfs op die mensen geleidelijk aan overgedragen wordt die van de wiskunde geen weet hebben"(1702).

Wat De Fontenelle schetst is allemaal gebeurd. Het wiskundig modelleren, soms gepresenteerd onder de noemer "de wetenschappelijke methode", functioneerde in de jaren vijftig inderdaad als teken van moderniteit, van vooruitgang in wetenschappelijke en in maatschappelijke zin.

Nu het Centraal Planbureau en het RIVM inderdaad met mathematische modellen werken en adviezen geven komt de kritiek. De waarheid zou in het gedrang komen, de onzekerheden zouden te groot zijn. Maar was dat nu niet de quintessens van het wiskundig modelleren ten opzichte van vroegere wetenschapsidealen? In de modellerende wetenschappen is het waarheidsstreven gerelativeerd. Een model is niet "waar" en een goed model dient een doel.

Van Hertz tot Van Dantzig is met grote inzet nagedacht over de verhouding wiskunde-werkelijkheid en de aanspraken op waarheid zijn hier opgeschort. De ideeën en de manieren van doen hebben zich ontwikkeld van

“Bild” in 1894 tot “wiskundig modelleren” in 1945. Wat wij vinden over de werkelijkheid kunnen we met succes uitdrukken in wiskunde. In het besef dat noch wat wij vinden, noch de wiskundige uitdrukking daarvan, samen-

valt met de werkelijkheid, kunnen we met succes wiskundige modellen opstellen.



Verantwoording

Delen van dit artikel zijn ontleend aan hoofdstuk 2 ‘Anderhalve eeuw toegepaste wiskunde’ van mijn boek *Jaren van berekening; toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskunde-beoefening 1945-1960*, Amsterdam (1998)

Referenties en noten

- 1 “Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen ist dieses: wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von der naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.” [Hertz 1894 p. 1] *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt* /Heinrich Hertz. Hrsg. von Ph. Leonard; mit einem Vorworte von H. von Helmholtz. Leipzig: J.A. Barth, 1894 (*Gesammelte Werke von Heinrich Hertz*, Band III). Dit boek van Heinrich Hertz (1857-1894) verscheen in 1894 postuum, nog wel op zijn aanwijzingen, meteen als deel 3 van zijn verzameld werk, hetgeen voldoende zegt over zijn roem. Zijn leermeester H. von Helmholtz (1821-1894) overleefde hem net.
- 2 “Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äusseren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifen auftreten werden; [...]” [Hertz 1894 pp. 1, 2].
- 3 “Die Übereinstimmung Geist und Natur lässt sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modellen von einander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, dass der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten” [Hertz 1894 p. 199 (#428)]. “System” is bij Hertz steeds fysiek gedacht.
- 4 [Gibbs 1902] *Elementary principles in statistical mechanics; Developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics* /J. Willard Gibbs. New York: Charles Scribner's Sons /London: Edward Arnold, 1902 (Yale Bicentennial Publications).
- 5 “Die kinetische “Erklärungen” werden zu Abbildungen und dementsprechend jene beiden Gruppen von “Hypothesen” zu willkürlichen Festsetzungen über den Aufbau des abbildenden Schemas; nämlich zu Festsetzungen 1) über die Struktur des Gasmodelles 2) über die Auswahl der Bewegungsschar.” [Ehrenfest 1911 p. 52] ‘Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik’ /P. und T. Ehrenfest. In: [Encyklopädie 1898 IV.32 (IV-4 Heft 6)] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* /Hrsg. Walther Dyck e.a.. Leipzig/Berlin: Teubner, 1898-1935. (Band IV Mechanik in 4 Teilbänden Hrsg. von F. Klein und C.H. Müller. Ehrenfest’s bijdrage, Heft 6 van Teilband 4, verscheen 12-12-1911). Curs. in origineel.
- 6 Onder meer Kramers, Casimir, Burgers, Tinbergen en Struik. Over Ehrenfest, zie [Klein 1970] *Paul Ehrenfest* /Martin J. Klein. Amsterdam: North Holland, 1970. Over Ehrenfests invloed op Struik, Burgers en Tinbergen [Alberts 1994b] ‘On Connecting Socialism and Mathematics: Dirk Struik, Jan Burgers, and Jan Tinbergen’ /G. Alberts. In: *Historia Mathematica* 21 (1994), pp. 280–305.
- 7 2.1 Wir machen uns Bilder der Tatsachen 2.11 Das Bild stellt die Sachlage im logischen Raum, das Bestehen und Nicht-bestehen von Sachverhalten da 2.12 Das Bild ist ein Modell der Wirklichkeit [Wittgenstein 1921] ‘Logisch-philosophische Abhandlung’, Ludwig Wittgenstein. *Annalen der Naturphilosophie* 14 (1921) 185-262. Afzonderlijk gepubliceerd als *Tractatus logico-philosophicus*, 1922.
- 8 [Burgers 1974] *The nonlinear diffusion equation; asymptotic solutions and statistical problems* /J.M. Burgers. Dordrecht/Boston: Reidel, 1974.
- 9 [Burgers 1955a p. 15] *Terugblik op de hydrodynamica* /J.M. Burgers (afscheidscollege). Delft: TH Afd.Werkbt., 1955. N.B. het woord “model” is van 1955, aanvankelijk gebruikte hij “mathematical examples”, na 1940 “wiskundig model”.
- 10 [Burgers 1941 p. 11–12] ‘Beschouwingen over de statistische theorie der turbulente strooming’ /J.M. Burgers. In: *Waarschijnlijkheidsrekening en statistische methoden; Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 8-1, 2 (1941), pp. 5–18.
- 11 [Tinbergen 1938] ‘Vertraginggolven en levensduurgolven’ /J. Tinbergen. In: [Strijdenskracht 1938 pp. 143–150] *Strijdenskracht door Wetensmacht; Opstellen aangeboden aan S. de Wolff ter gelegenheid van zijn 60e verjaardag* /J. v.d. Wijk e.a.(red.). Amsterdam: Arbeiderspers, 1938, pp. 145–146.
- 12 [Tinbergen 1936] ‘Prae-advies van Prof.dr. J. Tinbergen’ /J. Tinbergen. In: [Prae-adviezen 1936 pp. 62–108] *Prae-adviezen over ...* /H.A. Kaag e.a.; Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek. 's Gravenhage: Mart. Nijhoff, 1936.
- 13 Tinbergen bevestigde deze interpretatie desgevraagd in een gesprek op 2 december 1987. Hij herhaalt met nadruk dat de inzet van mathematische methoden geen principieel onderscheid maakt “zoals sommige Duitse filosofen intertijd beweerden”. Vergelijk [Kleerekoper 1938] *Over het gebruik van de wiskunde in de economie* /S. Kleerekoper (diss. U.v.A.). Groningen: Noordhoff, 1938.
- 14 [Tinbergen 1933 p. 74] *De Konjunktuur* /J. Tinbergen. Amsterdam: De Arbeiderspers, 1933.
- 15 Die opbouw met economie, en dan ook natuurkunde, in de appendix was een compromis met promotor Ehrenfest. [Tinbergen 1929] *Minimumproblemen in de natuurkunde en in de economie* /Jan Tinbergen. Amsterdam: Paris, 1929.
- 16 [Boumans 1992] *A case of limited physics transfer: Jan Tinbergen's resources for reshaping economics* /Marcel Boumans. Amsterdam: Thesis Publishers, 1992.
- 17 [Dantzig 1941 p. 78] ‘Mathematische en empiristische grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening’ /D. van Dantzig. In: *Waarschijnlijkheidsrekening en statistische methoden; Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 8 (1941) pp. 70–93.
- 18 [Dantzig 1946a p. 5] ‘Wiskunde, Logica en Ervaringswetenschappen’ (syllabus college Logica, TH Delft, 1945/46) /D. van Dantzig. S.l., s.a. [Delft: Studium Generale TH Delft, 1946]. [Dantzig 1947] ‘General procedures of empirical science’ /D. van Dantzig. In: *Synthese* 5 (1947) pp. 441–445. [Dantzig 1946b] ‘Syllabus Waarschijnlijkheidsrekening en Mathematische Statistiek’ /D. van Dantzig. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1946/47 [syllabus van kadercursus VWS 1946/47 en college UvA 1947-1950. Gestencild 27+415 pag.].
- 19 [Klamer/Dalen 1996] *De telgen van Tinbergen*, Arjo Klamer en Harrie van Dalen. Amsterdam: Balans, 1996.