

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
maandag 18 augustus 2003, 13:30-15:00

1. Het lineaire interpolatie polynoom p wordt gegeven door

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

waarbij de afbreekfout gegeven wordt door de formule

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)f''(\xi).$$

We beschouwen de functie $f(x) = 4x^3$, $x \in [0, 1]$.

- (a) Geef de formule van de lineaire spline s op $[0, 1]$ waarbij de drie roosterpunten gegeven worden door $0, \frac{1}{2}$ en 1 .
 - (b) Geef een bovengrens voor de afbreekfout voor $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Bepaal $|f(\frac{1}{4}) - s(\frac{1}{4})|$ en vergelijk dit met de bovengrens.
 - (c) Hoe groot is de afrondfout $|\hat{s}(x) - s(x)|$ als we rekenen met een \hat{f} , waarbij $|\hat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon$.
 - (d) Stel $\varepsilon = 0.1$. Is het zinvol om een spline te gebruiken met een kleinere stapgrootte (+ motivatie).
2. We beschouwen een beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, met $y(0) = y_0$. De RK₄ methode wordt gegeven door:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_j, u_j), \\ k_2 = hf(t_{j+\frac{1}{2}}, u_j + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 = hf(t_{j+\frac{1}{2}}, u_j + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 = hf(t_{j+1}, u_j + k_3), \\ u_{j+1} = u_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van RK₄ gelijk is aan:

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!}.$$

- (b) Geef de orde van de afbreekfout van RK₄ voor de testvergelijking.
- (c) Gegeven het beginwaardeprobleem:

$$y'' + 4y = 1, \quad y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = 0.$$

Schrijf deze vergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Is het stelsel differentiaalvergelijkingen stabiel?

- (d) Als we RK₄ toepassen op dit stelsel en we nemen $h = 1$, is de RK₄ methode dan stabiel?

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie vanaf 25-08-'03:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html>