Stabiliteit van een beginwaarde probleem

Stel dat de beginvoorwaarde een fout ε_0 bevat. De verstoorde oplossing $\tilde{y}$ voldoet aan

$$\tilde{y}' = f(t, \tilde{y}) \quad \text{en} \quad \tilde{y}(0) = y_0 + \varepsilon_0 \ .$$

De verschilfunctie noemen we ε : $\varepsilon(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$. Een beginwaarde probleem heet stabiel als

$$\lim_{t \to \infty} |\varepsilon(t)| < \infty \ .$$

Als de limiet onbegrensd is spreken we van een instabiel beginwaarde probleem. Een beginwaarde probleem is absoluut stabiel als

$$\lim_{t \to \infty} |\varepsilon(t)| = 0 \ .$$

We beperken de stabiliteitsanalyse eerst tot de testvergelijking.

Stabiliteit voor de testvergelijking

Voor de testvergelijking hebben we

$$y' = \lambda y + g(t) \quad \text{en} \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

en

$$\tilde{y}' = \lambda \tilde{y} + g(t) \quad \text{en} \quad \tilde{y}(0) = y_0 + \varepsilon_0 \ .$$

Combinatie geeft dat ε voldoet aan

$$\varepsilon' = \lambda \varepsilon \quad \text{en} \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \ . \tag{2}$$

De oplossing van (2) is

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\lambda t} \ .$$

De testvergelijking is stabiel als $\lambda \leq 0$ en absoluut stabiel als $\lambda < 0$.