Oefenopgaven Serie 10 (cursus 2004/2005)
wi2604: Numerieke methoden I [1]

Behandelde begrippen

- algemene randwaarde problemen
- convectie-diffusie vergelijking, upwind discretisatie
- warmte vergelijking

Opgaven

1. Gegeven het randwaarde probleem

$$-y''(x) + 10y'(x) = 0,\ x \in [0,1], y(0) = 1, y(1) = \alpha.$$

Neem $n = 4$ en bepaal de numerieke oplossing u waarbij voor y' een centrale differentie gebruikt is. (conclusie?) Geef de matrix A als er upwind differenties gebruikt worden.

2. Gegeven het randwaarde probleem

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{dr}\right) = 1,\ r \in [1,2],\ y(1) = 1, y(2) = 10.$$

Na discretisatie krijgen we een lineair stelsel. Geef hiervan de eerste, de tweede en de laatste vergelijking. Is de matrix symmetrisch?

3. Beschouw het warmteprobleem:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t),\ x \in [0,3], t > 0,$$

$$y(0,t) = 0,\ \ y(3,t) = 1,\ \ y(x,0) = 0, x \in [0,3].$$

(a) Neem het aantal inwendige roosterpunten in de x-richting gelijk aan 2 ($n = 2$). Vervang $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ door eindige differenties dan geldt

$$\mathbf{u}' = K\mathbf{u} + \mathbf{r} \text{ met } \mathbf{u}(0) = (0,0)^T. \tag{1}$$

Geef de matrix K en de vector $\mathbf{r}$ en bepaal de eigenwaarden van K.

(b) We passen Euler Forward toe op (1). Geef een bovengrens voor de tijdstap k zodat EF nog stabiel is.

(c) Neem $k = \frac{1}{2}$ en doe 2 stappen met EF. Doe ook 1 stap met EF en $k = 1$.

(d) Neem $k = 1$ en doe 1 stap met Euler Backward.

[1] voor de antwoorden zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/answer10.pdf