

Oefenopgaven Serie 3 (cursus 2004/2005)
wi2604: Numerieke methoden I ¹

Behandelde begrippen

- voorwaartse, achterwaartse en centrale differenties
- afbreekfout, afrondfout
- algemene differentieformules
- Relatie interpolatie en differentieformules

Opgaven

1. Bewijs voor $f \in C^3[x - h, x + h]$, dat de fout bij centrale differenties gegeven wordt door

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in [x-h, x+h].$$

2. Gegeven de volgende tabel (in 4 cijfers nauwkeurig):

x	e^x
0.98	2.664
0.99	2.691
1	2.718
1.01	2.745
1.02	2.773

Bepaal met de centrale differentie methode $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, zo nauwkeurig mogelijk de eerste afgeleide van $f(x) = e^x$ in het punt $x = 1$. Het echte antwoord is $e = 2.7182818\dots$. Maak een schatting van de afbreekfout en de afrondfout.

3. Stel een functie is gegeven in de punten $x - 2h, x - h, x, x + h, x + 2h$. Bepaal een numerieke differentieformule van een zo hoog mogelijke orde voor de tweede afgeleide. Bepaal hiermee een benadering van de tweede afgeleide van $f(x) = e^x$ uit bovenstaande tabel. Pas de formule ook toe met functiewaarden in meer cijfers.
4. Stel dat de positie van een schip bepaald kan worden met een meetfout van hoogstens 10 meter. Verder veronderstellen we dat de werkelijke plaats van het schip tijdens het op gang komen geven wordt door de functie $S(t) = 0.5at^2$, waarbij S in meters en t in seconden uitgedrukt wordt. De snelheid wordt benaderd met een achterwaartse differentie met stapgrootte h . Geef de afbreekfout en de meetfout in deze formule. Als $a = 0.004$ bepaal dan de waarde van h waarvoor de fout in de bepaalde snelheid minimaal is. Hoe groot is de fout?

¹voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/answer3.pdf>