TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (CTB2400 WI3097TU)
Donderdag 11 Augustus 2016, 18:30-21:30

1. We beschouwen de volgende methode

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \Delta t \left(a_1 f(t_n, w_n) + a_2 f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right) \end{cases} \tag{1}$$

voor de integratie van het **beginwaardeprobleem** $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

(a) Toon aan dat de *locale afbreekfout* van de bovenstaande methode van de orde $O(\Delta t)$ is als $a_1 + a_2 = 1$. Voor welke waarde van a_1 en a_2 is de locale afbreekfout van de orde $O((\Delta t)^2)$? (3 pt.)

(b) Laat zien dat de *versterkingsfactor voor algemene* a_1 en a_2 gegeven wordt door

$$Q(\lambda\Delta t) = 1 + (a_1 + a_2)\lambda\Delta t + a_2(\lambda\Delta t)^2. \tag{2}$$

(2 pt.)

(c) Beschouw $\lambda < 0$ en $(a_1 + a_2)^2 - 8a_2 < 0$, leid de *stabiliteitsvoorwaarde* af waar Δt aan moet voldoen. (2 pt.)

(d) We beschouwen het volgende *stelsel niet lineaire differentiaalvergelijkingen*:

$$\begin{aligned} x_1' &= -\sin x_1 + 2x_2 + t, \ \ x_1(0) = 0, \\ x_2' &= x_1 - x_2^2, \ \ x_2(0) = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Laat zien dat de Jacobiaan van het rechterlid van (3) op $t = 0$ gegeven wordt door:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1.5 pt.)

(e) Kies $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Voor welke waarden van Δt is de methode toegepast op (3) stabiel op $t = 0$? (1.5 pt.)

2. We zoeken een **differentie formule** van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h^2} f(0) + \frac{\alpha_{-1}}{h^2} f(-h) + \frac{\alpha_{-2}}{h^2} f(-2h),$$

zodat

$$f''(0) - Q(h) = \mathcal{O}(h).$$

(a) Geef het *lineaire stelsel vergelijkingen* waar α_0, α_{-1} en α_{-2} aan moeten voldoen. (2 pt.)

voor vervolg z.o.z.

x	$f(x)$
0	0
$-\frac{1}{4}$	0.0156
$-\frac{1}{2}$	0.1250
$-\frac{3}{4}$	0.4219
- 1	1.0000

Tabel 1: De gebruikte waarden

(b) De oplossing van het in het vorige onderdeel afgeleide stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{-1} = -2$ en $\alpha_{-2} = 1$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de *afbreekfout* $f''(0) - Q(h)$. (1 pt.)

(c) Geef met behulp van de *Richardson methode* een schatting van de fout $f''(0) - Q(\frac{1}{4})$. Gebruik daarvoor de getallen gegeven in Tabel 1. (2 pt.)

3. We beschouwen de **convectie-diffusie vergelijking** met Dirichlet randvoorwaarden:

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

waarin $u = u(x)$, $u' = \frac{du}{dx}$ en $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$.

(a) Laat zien dat

$$u(x) = x - \frac{1 - e^{x/\epsilon}}{1 - e^{1/\epsilon}}, \tag{5}$$

de *exacte oplossing* is van het randwaardeprobleem (4). (1 pt.)

(b) We lossen het randwaardeprobleem (4) op met behulp van *centrale eindige differenties* voor de diffusieve term en *upwind eindige differenties* voor de convectieve term.

Voor alle *inwendige punten* x_j geldt de discretisatievergelijking

$$-\epsilon \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{w_j - w_{j-1}}{\Delta x} = 1, \text{ for } j \in \{1, \dots, n\}. \tag{6}$$

met $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$, waarbij Δx de uniforme stapgrootte is.

Geef de *discretisatievergelijkingen* voor de twee randpunten x_1 en x_n. (1 pt.)

(c) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = 1/4$ om het stelsel vergelijkingen $\mathbf{Aw} = \mathbf{f}$ af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel heeft drie vergelijkingen met drie onbekenden, dat betekent dat $\mathbf{A}$ een 3×3 matrix is en $\mathbf{w}$ en $\mathbf{f}$ 1×3 kolomvectoren zijn.

Dit stelsel vergelijkingen hoeft **niet** opgelost te worden. (2 pt.)

(d) Zal de discretisatiemethode (6) oscillerende oplossingen geven? Motiveer je antwoord. (1 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html