TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN ( WI3097 TU/Minor AESB2210 )**
**Donderdag 20 April 2017, 18:30-21:30**

1. De **modified Euler methode** voor de integratie van beginwaarde probleem $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, is gegeven door

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{\Delta t}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right), \end{cases} \tag{1}$$

waarin $\Delta t$ de tijdstap en $w_n$ de numerieke oplossing op tijdstip $t_n$ voorstelt.

(a) Toon aan dat de *locale afbreekfout* van deze methode $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. (3 pt.)

(b) De *versterkingsfactor* wordt gegeven door

$$Q(\lambda \Delta t) = 1 + \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2}.$$

Leid deze versterkingsfactor voor de modified Euler methode af. (1 pt.)

(c) Gegeven het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin t, \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Laat zien dat bovenstaand beginwaarde probleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (2 pt.)

(d) Bereken *één stap* met de modified Euler methode, waarbij $\Delta t = 0.1$ en $t_0 = 0$ met de gegeven beginvoorwaarden uit (2). (2 pt.)

(e) Ga na of de modified Euler methode, toegepast op het gegeven beginwaarde probleem (2), stabiel is voor $\Delta t = 1$. (2 pt.)

2. Van een roeiboot wordt de snelheid geschat. De gemeten afstanden van de boot vanaf de startlijn staan in de onderstaande tabel.

| $t$ (s) | 0 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|
| $d(t)$ (m) | 0 | 40 | 100 |

(a) Geef de **erste orde achterwaartse differentieformul**e en bepaal hiermee een schatting van de snelheid op $t = 20$ ($d'(20)$). (1 pt.)

**voor vervolg z.o.z.**

(b) We zoeken een differentieformule voor de eerste afgeleide van $d$ in het punt $2h$ van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h} d(0) + \frac{\alpha_1}{h} d(h) + \frac{\alpha_2}{h} d(2h),$$

zodat

$$d'(2h) - Q(h) = O(h^2).$$

In de rest van de opgave werken we verder met deze formule. Laat zien dat de coefficienten $\alpha_0$, $\alpha_1$ en $\alpha_2$ moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\,, \\ -2\alpha_0 & - & \alpha_1 & & & = & 1\,, \\ 2\alpha_0 h & + & \frac{1}{2}\alpha_1 h & & & = & 0\,. \end{array}$$

(2 pt.)

(c) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $d'(2h) - Q(h)$. Geef opnieuw een schatting van de snelheid op $t = 20$. (2 pt.)

3. Vervolgens leiden we de **Newton-Raphson methode** af en gebruiken we deze om een niet lineair probleem op te lossen.

(a) Gegeven is het *scalaire* niet lineaire probleem:

$$\text{Bepaal } p \in \mathbb{R} \text{ zodat } f(p) = 0. \tag{4}$$

Leid de formule van Newton-Raphson

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \text{ voor } n \geq 1 \tag{5}$$

met beginschatting $p_0$ af om het probleem op te lossen. (1 pt.)

(b) Om te laten zien dat de Newton-Raphson methode convergeert, schrijven we de methode als een vaste punt methode:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{6}$$

Eén van de eisen van het convergentiebewijs is dat $g'(x)$ bestaat en voldoet aan:

$$|g'(x)| \leq k < 1. \tag{7}$$

Laat zien dat de Newton-Raphson methode toegepasst op $f(x) = \sin(x)$ naar de oplossing $p = 0$ convergeert als de beginschatting $p_0$ gekozen wordt in het interval $(-\pi/4, \pi/4)$. (1 pt.)

(c) Leid Newton-Raphson's methode voor het volgende *algemeene* niet lineare problem af:

$$\text{Bepaal } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m \text{ zodat } \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}. \tag{8}$$

(1.5 pt.)

(d) Voer **één** Newton-Raphson stap uit op het volgende niet lineaire problem voor $w_1$ en $w_2$:

$$\begin{cases} 18w_1 - 9w_2 + w_1^2 = 0, \\ -9w_1 + 18w_2 + w_2^2 = 9. \end{cases} \tag{9}$$

Gebruik $w_1 = w_2 = 0$ als de beginschatting. (1.5 pt.)

**Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:**
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html